



Modélisation mathématique en imagerie cardiaque

Khadidja Benmansour

► To cite this version:

Khadidja Benmansour. Modélisation mathématique en imagerie cardiaque. Mathématiques générales [math.GM]. INSA de Lyon; Université Abou Bekr Belkaid (Tlemcen, Algérie), 2014. Français. NNT : 2014ISAL0091 . tel-01175509

HAL Id: tel-01175509

<https://theses.hal.science/tel-01175509>

Submitted on 10 Jul 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse de Doctorat

Spécialité

Mathématiques Appliquées

Présentée par

Khadidja Benmansour

Pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et
de l'Université Abou Bekr Belkaid de Tlemcen**

Sujet de la thèse :

Modélisation mathématique en Imagerie Cardiaque

Jury :

Emmanuel Maitre	Université de Grenoble	Rapporteur
Rachid Touzani	Polytech de Clermont Ferrand	Rapporteur
Laurent Najman	Université de Paris-Est	Examineur
Christian Gout	INSA de Rouen	Examineur
Jérôme Pousin	Institut National des Sciences Appliquées de Lyon	Directeur de Thèse
Ghouti Senouci Bereksi	Université Abou Bekr Belkaid de Tlemcen	Co-directeur

Table des matières

0.1	Introduction générale	8
0.1.1	Méthodes basées sur un apprentissage	8
0.1.2	Méthodes spatio-temporelles	10
1	Perturbation singulière pour un problème de suivi d'images cardiaques	13
1.1	Introduction	13
1.2	Description du modèle et rappels de quelques résultats	16
1.2.1	Modèle élastique statique	16
1.2.2	Elasticité linéaire :	17
1.2.3	Système de Lamé	19
1.2.4	Existence d'une solution du problème stationnaire	23
1.2.5	Comportement asymptotique en temps	24
1.3	Problème de perturbation singulière	24
1.3.1	Comportement asymptotique en temps	26
1.4	Le cas d'une séquence d'images périodique	27
1.4.1	Méthode quasistationnaire pour les solutions périodiques	29
1.4.2	Convergence asymptotique par rapport à τ	31
1.4.3	Résolution numériques pour une séquence d'images cardiaques 2D	35
1.5	Conclusion	38
2	Equation de transport et principe du maximum discret	39
2.1	Introduction	39
2.2	Description du problème et cadre fonctionnel	40
2.3	Principe du maximum faible pour la formulation au sens des moindres carrés espace-temps	43
2.4	Approximation par éléments finis	45
2.4.1	Expression de la formulation variationnelle approchée	46
2.4.2	Une méthode de marche	46
2.4.3	Méthode de pénalisation	49
2.4.4	Méthode de Nitsche	50
2.5	Méthodes d'optimisation :	53
2.5.1	Projection sur le cône des fonctions positives	53
2.5.2	Problème avec un terme de régularisation	54
2.5.3	Méthode de multiplicateur de Lagrange	56
2.5.4	Méthode de limiteur de flux	58
2.5.5	Méthode de Kuzmin	61
2.5.6	Formulation au sens des moindres carrés avec pénalisation de la variation totale	66

TABLE DES MATIÈRES

2.5.7	Algorithmes pour le calcul de la solution	70
2.6	Résultats Numériques	75
2.7	Conclusion	78
2.8	Conclusion	91
3	Utilisation du transport optimal pour le suivi dynamique d'images ou la reconstruction anatomique	93
3.1	Introduction	93
3.2	Interpolation par Transport Optimal	94
3.2.1	Transport numérique 2D entre deux images	97
3.3	Algorithme de partition proximal	99
3.3.1	Les opérateurs Proximaux	99
3.3.2	Suivi dynamique d'une coupe du ventricule gauche	101
3.3.3	Reconstruction de l'anatomie du cœur	103
3.3.4	Interpolation en temps	112
3.3.5	Analyse des performances de l'algorithme	115
3.4	Conclusion	118

Remerciements

Au terme de ce travail, je souhaite adresser mes remerciements à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à sa réalisation.

Je remercie tout d'abord Mon Dieu tout puissant de m'avoir fait connaître le Professeur Jérôme Pousin, de m'avoir donné le courage et la force pour accomplir cette thèse.

Mes remerciements les plus sincères s'adressent à mon directeur de thèse, le Professeur Jérôme Pousin, pour m'avoir accueilli dans son laboratoire et m'avoir permis de réaliser cette thèse dans les meilleurs conditions.

Je tiens particulièrement à le remercier de m'avoir encadré de jour en jour, il a toujours été présent, à l'écoute de mes questions et s'est toujours intéressé à l'avancée de mes travaux. Il m'a généreusement fait partager ses idées, ses visions, ses explications et conseils durant chacune de nos séances de travail.

Je ne sais pas comment exprimer ma gratitude à Monsieur Pousin pour tout ce qu'il a fait pour moi, mais j'espère avoir été digne de la confiance qu'il m'avait accordé et ce travail est finalement à la hauteur de ses espérances. Quoi qu'il en soit, j'ai beaucoup appris à ses côtés, j'ai beaucoup aimé sa façon de travailler et je suis très honorée de l'avoir eu comme encadrant.

Je le remercie aussi pour ses qualités humaines et en Mathématiques, tout simplement l'expression "Enseignant Chercheur" c'est parfaitement incarnée dans son attitude à mon égard et j'espère agir comme lui avec des étudiants dans ma situation, si un jour l'occasion m'en est donnée.

Je voudrais remercier également, Emmanuel Maitre et Rachid Touzani d'avoir accepté de relire ma thèse et d'en être rapporteurs. Je remercie de même tous les membres de Jury d'avoir accepté d'assister à la présentation de ce travail.

Un grand Merci à mes très chers parents, mes deux frères, ma sœur, ma belle sœur et mon cher mari Mustapha de m'avoir encouragé et soutenu pendant ces années de thèse et ont permis par leurs conseils de la mener à bien.

Je remercie également, les membres du laboratoire ICJ de l'INSA ainsi que les membres du Pôle de Maths avec qui j'ai eu l'occasion de partager des bons moments durant mes séjours à Lyon. Entre autre : Les deux secrétaires ; Maud Louai et Sylvie Molmanne, les thésards : Mathieu Fabre, Imen Mekaoui, Farshid Dabagui, Amira Souguir...

Ce travail n'aurait pu être mené à bien sans l'aide de différents financements : La région Rhône Alpes, le Labex Milyon, l'ambassade de France en Algérie, ANR 3DSTRAIN et le stage d'un mois de l'université de Abou Bekr Belkaid de Tlemcen.

Enfin je remercie les professeurs de l'université de Tlemcen de m'avoir aidé dans des procédures administratives, Monsieur Mourid, Abi Ayed, Bereksi et Mebkhouit.

Résumé

Les pathologies cardiovasculaires sont la première cause des décès dans le monde. Il est donc vital de les étudier afin d'en comprendre les mécanismes et pouvoir prévenir et traiter plus efficacement ces maladies. Cela passe donc par la compréhension de l'anatomie, de la structure et du mouvement du cœur.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes intéressés dans un premier temps au modèle de Gabarit Déformable Élastique qui permet d'extraire l'anatomie et le mouvement cardiaques. Le Gabarit Déformable Élastique consiste à représenter le myocarde par un modèle de forme a priori donné que l'on déforme élastiquement pour l'adapter à la forme spécifique du cœur du patient. Le concept de modèle déformable a été introduit par Kass en 1987 avec le contour actif, baptisé en anglais **snake**, courbe évoluant dans une image pour s'ajuster au contour d'un objet. La convergence de la courbe avec les frontières de l'objet est obtenue par la minimisation de l'énergie du modèle. Une approche basée sur le Gabarit Déformable Élastique (GDE), a été initialement proposée par Cohen [25], puis améliorée par Vincent [74] qui a proposé un modèle déformable volumique basé sur l'élasticité linéaire, reprenant ses travaux Pham [62] a construit un modèle 3D et bi-cavités du cœur pour la segmentation et la mise en correspondance d'images cardiaques multimodales. Une segmentation spatio-temporelle dynamique dans des séquences d'IRM ciné sur la base de Fourier a été utilisée par Schaerer pour l'analyse d'un ensemble de référence de cœurs donné [69]. Dans le premier chapitre de cette thèse, nous nous sommes appuyés sur ses travaux et nous utilisons une méthode de perturbation singulière permettant la segmentation avec précision de l'image. Nous avons démontré que si l'on faisait tendre vers 0 les coefficients de l'élasticité, le modèle mathématique convergerait vers une solution permettant la segmentation.

L'équation du transport avec condition initiale et une condition finale en temps peut être utilisée pour transporter une image vers une autre si on connaît un champ de vitesse, en utilisant une méthode des moindres carrés.

Dans le cadre d'une formulation au sens des moindres carrés il est nécessaire de disposer d'une méthode numérique performante pour résoudre l'équation du transport au sens des moindres carrés. La méthode des éléments finis pour traiter les phénomènes de transport ne permet pas d'avoir un principe du maximum faible, sauf si l'opérateur aux dérivées partielles en temps est séparé de l'opérateur aux dérivées partielles en espace [49]. Dans le chapitre 2 de la thèse nous considérons une formulation au sens des moindres carrés espace-temps et nous proposons de résoudre un problème sous contraintes afin de récupérer un principe du maximum discret.

La formulation au sens des moindres carrés de l'équation du transport équivaut à un problème elliptique dégénéré (la matrice de diffusion a une valeur propre positive et est de rang 1). Un dernier paragraphe se propose d'étudier le problème dégénéré avec les outils de la géométrie différentielle si on suppose que la matrice de diffusion $J = \xi \otimes \xi$ pour ξ une fonction à valeurs vectorielles dans \mathbb{R}^3 telle que $\text{div}(\xi) = 0$.

Le dernier objectif de la thèse est le suivi dynamique d'images cardiaques ou la reconstruction anatomique du cœur à partir de coupes 2D dans le plan orthogonal au grand axe du cœur. La méthode mathématique que nous utilisons pour cela est le transport optimal. Dans le chapitre 3 nous analysons les performances de l'algorithme proposé par Peyré [60] pour calculer le transport optimal de nos images. La résolution numérique du transport optimal est un problème difficile et coûteux

TABLE DES MATIÈRES

en temps de calcul. C'est pourquoi nous proposons une méthode adaptative pour le calcul de l'opérateur proximal de la fonction à minimiser permettant de diviser par quatre le nombre nécessaire des itérations pour que l'algorithme converge.

Mots Clé

Segmentation d'images, perturbation singulière, modèle déformable, imagerie cardiaque, équation de transport, principe du maximum, variation totale, transport optimal.

Abstract

Cardiovascular disease are the leading cause of death worldwide. It is therefore vital to study them in order to understand the mechanisms and to prevent and treat these diseases more effectively. Therefore it requires an understanding of anatomy, structure and motion of the heart.

In this thesis, we are interested in a first time at the Deformable Elastic Template model which can extract the cardiac anatomy and movement. The Elastic Deformable template is to represent the myocardium by a shape model a priori given that it elastically deforms to fit the specific shape of the patient's heart. The concept of deformable model was introduced by Kass in 1987 with the active contour, called in English **snake** curve evolving in an image to fit the contour of an object. The convergence of the curve with the border of the object is obtained by minimizing the energy of the model. An approach based on the Deformable Elastic Template (GDE) was originally proposed by Cohen [25] then improved by Vincent [74], he proposed a volumetric deformable model based on linear elasticity. Resuming his work Pham [62] built a model 3D and dual chambers of the heart to the segmentation and matching multimodal cardiac images. A dynamic spatiotemporal segmentation in sequences of MRI cine based on Fourier was used by Schaerer for analysis by a given reference set of cores [69]. In the first chapter of this thesis, we relied on its work and we use a singular perturbation method for accurately segmenting the image. We have demonstrated that if we did tend to 0 the coefficients of elasticity, the mathematical model converge to a solution to the problem of segmentation.

The transport equation with initial condition and final condition in time can be used to convey an image to another if one knows a velocity field, using a least squares method.

As part of a formulation to the least squares sense it is necessary to have an efficient numerical method for solving the transport equation in the least squares sense. The finite element method to treat transport phenomena can not have a weak maximum principle, unless the operator of partial time is separated from the operator of partial space [49]. In Chapter 2 of the thesis, we consider a least squares formulation of space-time and we propose to solve the problem constraints to recover a discrete maximum principle.

The formulation in least squares sense of the transport equation is equivalent to a degenerate elliptic problem (the scattering matrix has a positive eigenvalue and has rank 1). A final section is to study the degenerate problem with the tools of differential geometry assuming that the scattering matrix $J = \xi \otimes \xi$ for ξ a vector valued function in \mathbb{R}^3 such that $\operatorname{div}(\xi) = 0$.

The final objective of this thesis is the dynamic monitoring of cardiac images or anatomical reconstruction of the heart from 2D slices orthogonal to the long axis of the heart level. The mathematical method we use for this is the optimal transport. In Chapter 3 we analyze the performance of the algorithm proposed by Peyré [60] to calculate the optimal transport of our images. The numerical resolution of optimal transport is a difficult and costly in computation time problem. That is why we propose an adaptive method for determining the proximity operator of the function to be minimized to divide by four the number of iterations required for the algorithm converges

Keywords

Image segmentation, singular perturbation, deformable model, cardiac imaging, transport equation, maximum principle, total variation, optimal transport.

0.1 Introduction générale

Les maladies cardiovasculaires sont aujourd'hui la première cause de mortalité dans les pays développés.

En particulier, les pathologies ischémiques en représentent une part significative qui sont elles mêmes la conséquence des pathologies vasculaires comme l'athérosclérose. Les techniques d'imagerie médicale actuelles permettent d'accéder à l'anatomie et différents aspects fonctionnels du coeur. L'imagerie par résonance magnétique (IRM) est la modalité d'imagerie non-invasive de choix pour accéder à l'anatomie cardiaque du patient.

La morphologie peut être également étudiée grâce aux techniques d'acquisition ultra sonore (US) ou l'imagerie pas rayons X.

L'information produite par les imageurs est appréciée qualitativement par le médecin. Dans bien des situations, l'exploitation quantitative et précise des informations requiert le développement de méthodes d'analyse des images. Dans ce sens, les nouvelles générations d'imageurs intègrent de plus en plus de fonctionnalités d'aide à l'analyse mais qui restent généralement assez sommaires. Notre volonté est d'apporter de nouveaux outils plus performants qui, à partir des images, génèrent avec le moins possible d'interventions de l'utilisateur, un modèle spécifique du coeur du patient qui intègre divers paramètres fonctionnels : descripteurs globaux de la fonction cardiaque (volumes, masses, fraction d'éjection) mais aussi locaux (mouvements, déformations ...). Un des problèmes les plus difficiles dans la réalisation de tels outils demeure la segmentation des images, c'est-à-dire l'identification et la localisation automatiques des différentes structures anatomiques présentes dans les images. Le nombre de structures présentes dans les images, la variabilité de leur forme et de leur apparence ainsi que le bruit et les différents artefacts présents en IRM concourent à rendre la segmentation particulièrement difficile.

Dans sa thèse, Pham [62] dresse un aperçu des méthodes existantes pour la segmentation d'IRM cardiaques, en insistant tout particulièrement sur les méthodes basées sur les modèles déformables. Selon la représentation de forme utilisée, il les classe en trois catégories : modèles discrets, paramétriques ou déformables. En outre, il présente quelques méthodes basées sur des modèles bioinspirés, et en particulier les travaux de Vincent [74]. Enfin, il présente un certain nombre de méthodes reposant sur un apprentissage. Notre objectif dans cette partie est de rendre compte des développements observés depuis que Pham a dressé cet état des lieux, c'est-à-dire depuis 2002. On observe trois développements principaux. Tout d'abord, un essor remarquable des méthodes basées sur un apprentissage. On note également une volonté marquée d'exploiter la nature dynamique des images étudiées, et d'analyser conjointement toutes les images d'une séquence 4D. Enfin, on observe le développement de nombreux modèles inspirés de la réalité physiologique, que ce soit pour la simulation ou pour l'analyse d'images. Nous présentons quelques travaux marquants dans chacune de ces voies.

0.1.1 Méthodes basées sur un apprentissage

Le coeur a une géométrie et un mouvement complexe, avec une grande variabilité inter-patients au niveau de l'anatomie et de la dynamique. Les différents types d'imageurs, couplés aux différents types de séquences d'acquisition, vont former des images de qualité différente au niveau du contraste, de la résolution, du bruit, des artefacts, etc. Il est donc particulièrement difficile de développer un modèle mathématique générique prenant en compte tous ces paramètres (aussi bien au niveau du patient que de l'ima-

geur) afin de segmenter le coeur de manière robuste. Dès lors, une méthode naturelle consiste à "nourrir" le modèle avec de nombreux exemples afin qu'il puisse s'adapter automatiquement quand on lui fournira un cas inconnu. On parle dans ce cas de méthodes basées sur un apprentissage. Celui-ci peut se faire sur de nombreux paramètres, tels que la forme de l'objet ou sa dynamique.

Une des méthodes les plus connues est le modèle actif de forme (en Anglais : Active Shape Model, ASM), introduite par Cootes et al. [Cootes et al. (1995)], où la variation de la forme est représentée par des modèles linéaires via une analyse en composantes principales (ACP). Les méthodes ASM, et leur extension pour tenir compte de la variation de texture appelée modèle d'apparence active (en Anglais : Active Appearance Model, AAM), ont été utilisées dans de nombreuses applications médicales telles que la segmentation du cerveau, des poumons et du coeur [O'Brien et al. (2009)].

S'inspirant directement des travaux de Cootes et al., Mitchell et al. ont développé un modèle AAM pour la segmentation de coupes IRM 2D du coeur [Mitchell et al. (2001)].

Ils ont ensuite étendu cette méthode à une version 3D [Mitchell et al. (2002)]. Ce modèle est un modèle hybride forme/apparence active procédant en plusieurs étapes permettant d'éviter de tomber dans un minimum local. On représente les modes de variation de la forme de l'image à analyser sous forme d'un vecteur de coordonnées de points de contrôle. On effectue ensuite une ACP de ces modes de variation. On procède de même en ce qui concerne l'apparence, en effectuant l'ACP sur des images 3D recalées. Enfin, on effectue une dernière ACP sur la concaténation des représentations de forme et d'apparence obtenues précédemment, pour obtenir le résultat final. Cette méthode est totalement automatique et permet de segmenter les ventricules gauche et droit, en statique. Elle n'intègre aucun a priori et dépend entièrement de l'apprentissage, qui doit donc être fait sur de nombreuses images pour que la méthode soit robuste. Dans [Mitchell et al. (2002)], l'apprentissage a été effectué avec près de 60 volumes segmentés manuellement.

Lötjönen et al. ont présenté une méthode basée sur un modèle de distribution statistique de points [Lötjönen et al. (2004)]. Ils comparent quatre modèles de forme entraînés sur les mêmes données : deux modèles de forme active, un modèle basé sur la distribution de probabilité de présence de chaque point du maillage, et un dernier basé sur un atlas anatomique. Pour chaque méthode, le modèle d'apparence utilisé est une normalisation de la moyenne des volumes recalés de manière affine. Les résultats de cette étude montrent que l'atlas anatomique donne de bien meilleurs résultats que les autres méthodes. Les modèles de forme active apparaissent trop contraints, même avec une base d'apprentissage relativement importante (25 patients dans cette étude).

Lorenzo-Valdés et al. ont aussi proposé une méthode basée sur un atlas anatomique, pour la segmentation d'IRM cardiaques 4D [Lorenzo-Valdés et al. (2003)]. L'algorithme proposé se base sur l'extension 4D de l'algorithme de maximisation de l'espérance (en Anglais, Expectation Maximisation, EM), en utilisant un atlas probabiliste du coeur 4D afin d'estimer les paramètres initiaux du modèle et intégrer de l'information a priori. Cet atlas a été construit à partir de la segmentation manuelle de séquences IRM cardiaques de 14 patients et fournit des cartes de probabilité spatiales et temporelles pour les ventricules gauche et droit, le myocarde ainsi que les structures externes telles que le foie, l'estomac ou les poumons. En plus de cet atlas probabiliste, l'algorithme de segmentation incorpore aussi des informations spatiales et temporelles contextuelles dans le formalisme des champs de Markov 4D.

Les méthodes utilisant un a priori statistique ont aussi été utilisées pour analyser des images du coeur dans d'autres modalités. Quian et al. [Quian et al. (2005)] ont proposé

une méthode de segmentation d'IRM de marquage tissulaire basée sur un modèle ASM pour la forme, couplé à un modèle d'apparence statistique basé sur la méthode Ada-boost [Freund and Schapire (1995)] et des filtres de Gabor. Lorenz et al. ont proposé un modèle statistique de forme basé sur les images de 13 patients pour la segmentation automatique d'images tomodensitométriques 3D du coeur [Lorenz and von Berg (2006)]. Zhou et al. ont proposé une méthode probabiliste pour le suivi de contours en échocardiographie [Zhou et al. (2005)]. Cette méthode fusionne l'information provenant de quatre sources de données afin de générer le meilleur modèle possible. Ces sources sont : un modèle de forme active avec apprentissage par ACP, un modèle de la dynamique, un contour initial et les estimations de mouvements provenant de l'analyse des images à segmenter. L'information de chaque source est analysée et l'incertitude dans la position de chaque point du contour est évaluée. La connaissance de cette incertitude permet de fusionner les informations de manière optimale, en suivant le contour lorsque l'information est visible sur les images, mais en s'appuyant sur le modèle a priori dans le cas contraire (bruit trop important, occlusions).

0.1.2 Méthodes spatio-temporelles

La fonction du coeur étant assurée par sa contraction, une vision précise de la dynamique cardiaque est d'un grand intérêt pour les médecins. Pour cette raison, les différentes modalités d'imagerie cardiaque proposent une résolution temporelle toujours accrue : de l'ordre de 30 images par cycle pour l'IRM (acquises sur plusieurs cycles cardiaques et synchronisées sur l'électrocardiogramme), et plus de 60 en échocardiographie. De plus en plus d'auteurs proposent donc d'utiliser cette information dynamique pour la segmentation. En effet, un certain nombre d'informations a priori sont connues : le mouvement du coeur est quasiment périodique et régulier.

On peut classer les différentes méthodes de segmentation dynamique selon la manière dont elles prennent en compte la dimension temporelle : certaines méthodes la considèrent comme une dimension spatiale supplémentaire, indifférenciée des trois dimensions usuelles. On peut alors parler de méthodes 4D. D'autres méthodes la traitent séparément.

Cousty et al. proposent une méthode de segmentation 3D basée sur le concept morphologique de la ligne de partage des eaux topologique. Ils étendent la méthode en quatre dimensions en définissant simplement un voisinage 4D pour chaque voxel. La prise en compte de la dimension temporelle améliore significativement les résultats, et notamment la régularité temporelle des contours. Les modèles déformables forment un contexte naturel pour exprimer des contraintes temporelles. Nastar et Ayache ont proposé un modèle masseressort dynamique pour la segmentation de l'endocarde en IRM. La régularité temporelle est améliorée en projetant les trajectoires des points du modèle sur une base de fonctions harmoniques.

Les maillages simplexes sont une représentation discrète de forme introduite par Delingette. Un maillage simplexe est le dual topologique d'une triangulation. Ces maillages ont la particularité importante d'avoir une connectivité constante : dans le cas d'un maillage de topologie sphérique, chaque noeud est connecté à exactement trois voisins. Cette représentation de forme permet de calculer simplement la courbure discrète en chaque point du maillage, ce qui permet d'implanter des modèles déformables avec une contrainte de courbure. En s'appuyant sur ces travaux, Gérard et al. ont proposé une méthode de segmentation de données échocardiographiques. La méthode de segmentation n'est pas dynamique en elle-même, mais utilise un modèle de mouvement cardiaque issu de données acquises en IRM de marquage tissulaire

pour l'initialisation du modèle. Montagnat et Delingette ont proposé une extension du modèle simplexe pour la segmentation de séquences d'images 4D en considérant un maillage 4D comme une collection de maillages 3D avec une arête liant chaque point à ses voisins temporels. La dimension temporelle est traitée de manière géométrique, mais séparément des dimensions spatiales.

Récemment, Lynch et al. ont proposé un modèle de mouvement paramétrique très simple, qu'ils exploitent dans le cadre des ensembles de niveaux. Ayant remarqué que la distance au contour d'un point physique suit un profil gaussien au cours du cycle cardiaque, ils contraignent la fonction implicite à suivre un profil de ce type en chaque point. Pour éviter de trop contraindre le modèle, les paramètres du profil gaussien sont recalculés à chaque itération.

Dans le contexte un peu différent de la segmentation et du suivi du coeur en échocardiographie, Jacob et al. , reprenant des idées de Blake et al., proposent une méthode basée sur un apprentissage de la forme et de la dynamique. La forme est représentée par une B-spline et l'apprentissage effectué de manière classique. La dynamique est exprimée dans le formalisme du filtrage de Kalman.

Dietenbeck et al. [Dietenbeck et al. (2012)] ont proposé une méthode pour la segmentation statique 2D du myocarde complet sur toutes les vues échocardiographiques par ensemble de niveaux. Ils utilisent un terme d'attache aux données locales de Lankton, un a priori de forme correspondant à deux hyperquadriques ainsi qu'un terme d'épaisseur locale afin d'empêcher la fusion des contours endo et épicaudiques.

Barbosa et al. [Barbosa et al. (2012)] ont également proposé une méthode par ensemble de niveaux pour la segmentation et le suivi de l'endocarde en 3D et en temps réel, à l'aide de surfaces explicites. Géométriquement, cela signifie qu'une des coordonnées est exprimée en fonction de toutes les autres coordonnées, dans ce cas comme une combinaison linéaire de fonctions de base B-Spline, comme présenté dans [Bernard et al. (2009)]. Le terme d'attache aux données est aussi celui de Lankton. Le calcul des statistiques s'effectue sur les points le long de la normale aux contours et non sur l'ensemble du voisinage.

Sundar et al. [Sundar et al. (2009)] ont proposé une méthode basée sur un modèle contraint "biophysiquement" afin de reconstruire le mouvement en 4D des parois ventriculaires dans des séquences IRM marquées. La principale caractéristique de cette méthode est l'intégration de la contraction active des fibres myocardiques pour contraindre le modèle. Le but ici est d'introduire de l'information biophysique afin d'avoir des a priori contenant plus d'information et obtenir une estimation plus précise du mouvement des parois.

Vincent [74] a proposé un modèle déformable volumique basé sur l'élasticité linéaire, le Gabarit Déformable Élastique. Reprenant ses travaux, Pham [62] a construit un modèle 3D et bi-cavités du coeur pour la segmentation et la mise en correspondance d'images cardiaques multimodales. Enfin, Rouchdy [67] a proposé une formulation non-linéaire du GDE de Vincent qui tolère de grandes déformations et dispose de bonnes propriétés théoriques. Une segmentation spatio-temporelle dynamique dans des séquences d'IRM ciné sur la base de Fourier et un argument perturbatif a été utilisé dans [69] pour l'analyse d'un ensemble de référence de coeurs donnés.

Dans le cadre de cette thèse nous nous sommes intéressés à l'extraction ou la segmentation de l'anatomie du coeur, dans un premier temps nous nous sommes appuyés sur les travaux de Scheerer et nous avons utilisé une méthode de perturbation singulière et une technique de filtrage pour la segmentation d'images cardiaques basées sur le modèle de gabarit déformable élastique dynamique qui suppose que le mouvement

du modèle est périodique. Ensuite nous nous sommes intéressés au suivi dynamique d'image ou la reconstruction anatomique en utilisant le transport optimal dépendant du temps due à Benamou Brenier [16], mais ce problème nécessite la résolution de l'équation de transport ce qui est l'objectif de la deuxième partie de la thèse.

dans cette partie nous nous sommes intéressés à la résolution de l'équation de transport par la méthode des éléments finis .

Une caractéristique importante de la méthode des éléments finis pour simuler des phénomènes de transport est son incapacité de satisfaire le principe du maximum sur des maillages globaux pour la formulation de Galerkin standard. Cette carence se manifeste par des oscillations parasites (undershooting et overshooting), qui est bien connue depuis longtemps dans la littérature de la dynamique des fluides.

Beaucoup de moyens sont disponibles pour les techniques des différences finis telles que limiteur de flux [65] et la correction de flux [49] qui ont été étendu à la méthode des éléments finis, dans la formulation considéré par Kuzmin, l'opérateur des dérivées partielles en temps est séparé de l'opérateur des dérivées partielles en espace. Nous avons considéré une formulation au sens des moindres carrés espace-temps de l'équation de transport et nous avons proposé des méthodes numériques afin de récupérer un principe du maximum discret.

L'objectif de la troisième partie est de proposer une méthode numérique qui permet la reconstruction anatomique du cœur à partir d'images de coupes 2D de celui-ci à un temps fixé.

La reconstruction est habituellement obtenue avec des techniques d'interpolation linéaire entre les deux coupes. Nous nous sommes intéressés dans notre travail à une méthode fondée sur la théorie du transport optimal et nous avons utilisé l'algorithme de Peyré [60] et comme celui ci est très coûteux en temps de calcul nous avons proposé une méthode adaptative qui permet d'accélérer l'algorithme de Peyré.

Chapitre 1

Perturbation singulière pour un problème de suivi d'images cardiaques

Sommaire

1.1	Introduction	13
1.2	Description du modèle et rappels de quelques résultats	16
1.2.1	Modèle élastique statique	16
1.2.2	Elasticité linéaire :	17
1.2.3	Système de Lamé	19
1.2.4	Existence d'une solution du problème stationnaire	23
1.2.5	Comportement asymptotique en temps	24
1.3	Problème de perturbation singulière	24
1.3.1	Comportement asymptotique en temps	26
1.4	Le cas d'une séquence d'images périodique	27
1.4.1	Méthode quasistationnaire pour les solutions périodiques	29
1.4.2	Convergence asymptotique par rapport à τ	31
1.4.3	Résolution numériques pour une séquence d'images cardiaques 2D	35
1.5	Conclusion	38

1.1 Introduction

¹ Les maladies cardio-vasculaires regroupent l'ensemble des maladies du cœur et de la circulation sanguine. Les principales maladies cardiaques sont représentées par les cardiopathies coronariennes (touchant les vaisseaux sanguins qui alimentent le muscle cardiaque), les maladies cérébro-vasculaires (touchant les vaisseaux sanguins qui alimentent le cerveau) ou encore les malformations cardiaques congénitales (malformations de la structure du cœur déjà présentes à la naissance).

1. Le chapitre a donné lieu à un article en Asymptotic Analysis qui est en révision.

CHAPITRE 1. PERTURBATION SINGULIÈRE POUR UN PROBLÈME DE SUIVI D'IMAGES CARDIAQUES

La maladie cardiaque la plus fréquente est la maladie coronaire qui s'exprime parfois d'emblée par l'arrêt cardiaque. Mais la plupart du temps c'est l'infarctus et l'angine de poitrine qui débute la maladie coronaire. L'infarctus du myocarde, ou syndrome coronaire aigu et les accidents vasculaires cérébraux (AVC) sont liés à l'obturation brutale d'une des artères coronaires empêchant le sang de parvenir au cœur ou au cerveau. En particulier, l'infarctus du myocarde est une nécrose d'une partie du muscle cardiaque secondaire suite à un défaut d'oxygénation (ischémie). Il se produit quand une ou plusieurs artères coronaires se bouchent, les cellules du myocarde irriguées par cette (ou ces) artère(s) ne sont alors plus oxygénées, ce qui provoque leur étouffement. La zone infarctée ne se contractera plus correctement.

En 2008, l'organisation mondiale de la santé (OMS) estimait que 30% des décès dans le monde étaient dus à des pathologies cardio-vasculaires. Parmi ces décès, on estime que 7.3 millions sont dus à une cardiopathie coronarienne et 6.2 millions à un AVC (statistique OMS 2008). Il est primordial de comprendre l'anatomie, la structure et la dynamique du cœur afin de prévenir, détecter, identifier, prédire l'évolution et soigner ces maladies. D'où l'importance de comprendre au mieux le fonctionnement du cœur normal et pathologique.

L'imagerie cardiaque, incluant de nombreuses modalités, telle que l'imagerie par résonnance magnétique (IRM), l'imagerie ultra sonore (US) ou l'imagerie par rayons X, fournit de nombreuses informations sur l'anatomie et la fonction cardiaque, elle permet aussi de mieux comprendre les causes et les évolutions des différentes pathologies.

Néanmoins, l'exploitation de toutes ces données en clinique reste très incomplète. Le volume très important de données rend une analyse manuelle de celle-ci pour chaque patient impossible, car trop fastidieuse. De plus l'analyse manuelle des données manque d'objectivité et de reproductibilité, cela est dû à une grande variabilité inter et intra opérateurs, ce qui compromet la validité des résultats obtenus, aussi bien dans le domaine de la recherche mais aussi clinique. Il apparait donc nécessaire de développer des outils d'analyse assisté par des ordinateurs dédiés. Ces outils d'analyse sont de plus en plus élaborés. Physiciens, médecins, biologistes et mathématiciens doivent travailler ensemble à l'élaboration de modèles réalistes permettant d'extraire des informations pertinentes à partir d'observations cliniques et expérimentales. Certains modèles se focalisent sur l'extraction de l'anatomie et permettent aujourd'hui une analyse accélérée et objective de groupes importants de patients, en fournissant divers paramètres anatomiques globaux et locaux. D'autres se focalisent plus sur une modélisation multi-échelle du cœur, c'est-à-dire des modèles physiologiques ou pathophysiologiques incorporant des informations sur l'anatomie, le mouvement, l'architecture fibreuse ou encore l'activité électrique du cœur. De plus, la fusion de modèles génériques et d'images cardiaques spécifiques à un patient permet de développer des modèles personnalisés au patient et peut apporter aux cliniciens des informations quantitatives de premier ordre pour le diagnostic, la prédiction et la thérapie des maladies cardio-vasculaires.

Cela fait de l'imagerie et de la modélisation cardiaque des outils précieux pour l'aide au diagnostic et au suivi des patients.

Le premier problème qui se pose au traiteur d'images est l'abondance des structures présentes dans l'image : structures cardiaques bien entendu, mais aussi foie, côtes, artères pulmonaires, coronaires, etc. La plupart de ces structures ne sont pas nécessaires pour l'application médicale considérée, mais doivent néanmoins être distinguées des structures d'intérêt par l'algorithme. Ce problème met en évidence le besoin d'un a priori pour un traitement d'images satisfaisant : pour retrouver les structures d'intérêt parmi toutes les autres, l'algorithme doit disposer d'un modèle décrivant l'apparence

et la forme de la structure recherchée. Le second problème, intrinsèque au vivant, est la grande variabilité de la forme des structures étudiées. Selon le patient, la taille, la forme et la configuration des différents organes peut varier énormément. De plus, les paramètres d'imagerie, tels que l'orientation des coupes, le nombre de coupes ou le type de contraste utilisé, dépendent du choix du radiologue. D'une séquence à l'autre, l'apparence des structures d'intérêt peut donc varier considérablement. L'a priori utilisé doit donc être suffisamment souple pour pouvoir accommoder toutes les variations anatomiques des organes étudiés, et en même temps suffisamment fort pour permettre de distinguer la structure d'intérêt des autres. Dès lors on voit que la connaissance a priori utilisée par les algorithmes de segmentation et d'estimation de mouvement pour les images médicales est déterminante pour la qualité des résultats à produire. Les connaissances dont on dispose sont de plusieurs types :

- Informations statistiques sur les variations les plus fréquentes de la forme des différentes structures. On utilise généralement une base de données d'un certain nombre de patients pour construire cet a priori. Cette information est à utiliser avec précaution, puisque certaines pathologies peuvent conduire à des variations anatomiques uniques. Or, une des finalités des algorithmes d'analyse automatisée d'images médicales est justement de détecter ces pathologies. Un a priori trop fort risquerait donc de mettre à mal cette fonction de détection.
- Informations sur la configuration des structures les unes par rapport aux autres.
- Informations sur le mouvement : quelle que soit la pathologie étudiée, on sait que le mouvement respecte les lois physiques de la dynamique. En particulier, comme les forces en présence sont bornées, l'accélération l'est aussi et le mouvement a donc une certaine régularité. En IRM ou en tomodensitométrie cardiaques, on peut en plus supposer que le mouvement est périodique : même s'il ne l'est pas vraiment en réalité, en pratique, on n'acquiert qu'un seul cycle cardiaque. On peut donc périodiser le mouvement sans problèmes.

Différentes méthodes existent pour exprimer ces connaissances de manière algorithmique. Nous proposons une approche basée sur le Gabarit Déformable Élastique (GDE), initialement proposé par Cohen [25] puis Vincent [74] et étendu par Pham [62] et Rouchdy [67]. Le GDE est composé d'une forme a priori et d'un modèle physique de déformation, basé sur la théorie de l'élasticité. La forme a priori, généralement obtenue à partir d'un volontaire sain, décrit la forme attendue de la structure à segmenter. Les méthodes déformables sont des classes de méthodes qui ont reçu beaucoup d'attention dans le passé [25].

La segmentation par modèles déformables fait partie de la segmentation d'image par approche de frontières qui cherche à identifier les contours d'un ou plusieurs objets présents dans l'image. Les modèles déformables reposent sur un modèle a priori de la forme de la structure de référence à extraire de manière itérative adaptée aux données d'images à la convergence. Le processus d'adaptation est généralement entraîné par un champ de force issu de l'image par le calcul intermédiaire de la pente d'une carte de bord ou par la méthode du Gradient Vector Flow (GVF). Un modèle (objet) représentant le cœur est immergé dans les données d'image, et est soumis à un champ de force qui tire le bord de l'objet vers la direction des bords de l'image. Le champ de force doit être nul sur les endroits où on veut amener le bord du modèle [62].

La méthode de Gabarit Déformable présente plusieurs avantages, en revanche un inconvénient concerne la régularité du champ de déplacement et le bord de l'objet final. Dans ce chapitre, deux objectifs complémentaires ont été abordés. Le premier consiste à utiliser une méthode de perturbation singulière afin d'améliorer la précision de la détection du bord de l'objet à détecter dans l'espace de l'image, c'est-à-dire faire en

sorte que la contrainte $f = 0$ est satisfaite. Le second objectif concerne la segmentation dynamique spatio-temporelle, c'est-à-dire la segmentation de séquences d'images cardiaques au cours du cycle cardiaque. A partir d'une famille discrète temporelle d'images cardiaques dans le cycle cardiaque, nous aimerions récupérer une séquence continue dans le temps des images cardiaques dans le cycle cardiaque.

De nombreuses méthodes ont été proposées pour résoudre le problème dynamique de l'IRM cardiaque. Zhu et al ont proposé un modèle intégrant le mouvement par l'intermédiaire d'un algorithme de prédiction de la dynamique [77]. Montagnat et Delingette ont proposé un modèle simplex pour la segmentation d'images 4D [55], la précision de la segmentation de ce modèle déformable 4D est estimée sur la synthèse de séquences d'images SPECT pour lequel une réalité de terrain sur le volume LV est connue. Dans les deux dernières références les auteurs n'ont pas utilisé la stratégie de filtrage, mais un processus de contrôle. Nastar a proposé un modèle déformable surfacique avec une base de Fourier pour exprimer le mouvement des points de contrôle [56]. Une segmentation spatio-temporelle dynamique dans des séquences d'IRM ciné sur la base de Fourier et un argument perturbatif a été utilisé dans [69] pour l'analyse d'un ensemble de référence de cœurs donnés. Dans ce chapitre, nous présentons une analyse mathématique de ce modèle variationnel pour la segmentation de séquences d'images cardiaques basée sur le modèle élastique déformable dynamique qui suppose que le mouvement du modèle est périodique. Une combinaison d'une technique de filtrage avec une méthode de perturbation singulière est proposée et analysée et quelques résultats numériques pour les images IRM sont donnés.

Dans la section 2, une description du modèle est donnée et quelques rappels sur le modèle de Gabarit Déformable et de la théorie de l'élasticité sont introduits. La section 3 est consacrée à l'analyse de la méthode de perturbation singulière. La section 4, traite le problème de suivi d'images pour une séquence d'images cardiaques. La stratégie d'interpolation avec filtrage combinée avec la méthode de perturbation singulière est proposée pour le problème de suivi d'images. La convergence d'un schéma itératif est prouvée. Enfin, certains résultats numériques sont présentés pour des images cardiaques 2D, ce qui démontre l'efficacité de la méthode.

1.2 Description du modèle et rappels de quelques résultats

1.2.1 Modèle élastique statique

Le concept des modèles déformables a fait l'objet de nombreuses études. L'extraction ou la reconstruction d'une forme par modèle déformable est obtenue par la donnée d'une représentation géométrique (discrète, courbe, surface, volume) qui est proche de l'objet à segmenter. Ce modèle est positionné dans l'image par transformation affine à proximité de la structure à extraire. Le GDE est ensuite déformé avec un champ de force issu de l'image pour s'ajuster aux contours de l'objet étudié.

En imagerie médicale, l'hypothèse de régularité de la surface des structures anatomiques est souvent faite. La déformation d'une courbe ou d'un gabarit initial se prête bien à un formalisme variationnel, c'est à dire, une minimisation d'une énergie se composant essentiellement de deux termes, un terme d'attache aux données et un terme régularisant :

$$E = E_{\text{élastique}} + E_{\text{données}} \quad (1.1)$$

L'énergie interne va régulariser les déformations et l'énergie externe va guider les déformations en fonctions des données d'image. L'efficacité du modèle dépend du choix de la configuration initiale, de l'énergie interne et de l'énergie externe.

Principales étapes de la segmentation : Les principales étapes de la segmentation par Gabarit déformable élastique sont :

- Construction du modèle géométrique initial. En pratique c'est une approximation standard de l'objet étudié (en imagerie cardiaque il s'agit d'un maillage volumique des ventricules du cœur).
- Positionnement du modèle avec des transformations affines.
- Segmentation par déformation non-affine du modèle initial.

Création du champ de force

Les champ de forces externes qui s'appliquent sur le modèle déformable sont de toute première importance puisqu'ils vont guider le modèle vers les contours de l'objet à segmenter. Il y a eu un grand nombre de recherches à ce sujet. Cohen [25] donne un bon résumé des différentes approches avant l'invention du Gradient Vector Flow (GVF). La plupart des méthodes de calcul de champ de forces à partir de l'image peuvent être décomposées en quatre étapes :

- Pré-traitement de l'image.
- Extraction des contours.
- calcul d'un champ de forces dérivé des contours.
- Post-traitement sur le champ obtenu.

Le pré-traitement de l'image est un simple filtre médian, permettant d'enlever le bruit et les autres petites structures qu'on ne souhaite pas segmenter.

L'extraction des contours peut se faire avec n'importe quelle méthode de segmentation orientée niveau de gris. Ces contours vont ensuite servir de base pour le calcul du champ de forces. De manière générale, après le calcul du gradient de niveau de gris, on seuille une première fois pour obtenir des germes avec un seuil haut, puis une seconde fois avec un seuil bas en n'ajoutant que les points connectés à un germe. Enfin, on élimine les contours contenant peu de pixels.

Le champ de forces appliqué aux interfaces du modèle est issu des contours extraits. De manière générale, cela consiste à créer une correspondance entre les contours du modèle se déplaçant vers un point du contour. Le champ de force utilisé est le champ de force dérivé d'un potentiel. Ce champ de force, doit être telle que sa dérivée est nulle sur les lieux où nous souhaitons dessiner les interfaces du modèle.

1.2.2 Elasticité linéaire :

Le modèle de déformation auquel nous nous intéressons repose sur les principes de l'élasticité linéaire. Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage [24] pour des détails de l'élasticité tridimensionnelle.

La théorie de l'élasticité étudie les déformations "élastiques" des solides sous l'effet des forces externes f .

La forme du solide est représentée par un ouvert borné connexe Ω de frontière $\partial\Omega$. Le corps se déforme sous l'action de champ de force sur $\partial\Omega$. Le sous-ensemble de dimension finie de déplacements rigides est noté par \mathcal{R} . L'espace $H = (L^2(\Omega))^2/\mathcal{R}$, est l'espace quotient de fonctions mesurables de carré intégrables avec les déplacements

rigides, et l'espace $V = (H^1(\Omega))^2 / \mathcal{R}$ est l'espace de Sobolev des fonctions appartenant à H avec des dérivées au sens des distributions dans H . La norme H^1 est notée par $\|\cdot\|_{1,\Omega}$. Nous supposons les hypothèses suivantes. La première hypothèse consiste à supposer que la frontière du domaine est régulière pour avoir une solution régulière et la seconde est pratique pour l'analyse asymptotique, et est compatible avec l'utilisation du gradient d'une carte de contours pour dériver la fonction f .

1. H1 : Ω est un domaine borné de \mathbb{R}^2 , dont sa frontière $\partial\Omega$ est C^4 .
2. H2 : La fonction f est définie de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R}^2 , uniformément bornée Lipschitzienne avec une constante M_f et est un gradient : $\exists F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$, tel que : $-DF(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$. De plus, f vérifie $f \perp \mathcal{R}$.

Le champ de déplacement est désigné par u , la déformation est habituellement représentée par le tenseur de déformation de Green-Lagrange, ce tenseur est donné par :

$$\mathcal{E}_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

On cherche à trouver la position d'équilibre du solide sous l'action des forces sur $\partial\Omega$. Les équations d'équilibre sont données par le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\partial_j \sigma_{ij} &= 0 \text{ dans } \Omega \\ \sigma_{ij} n_j &= f_i(I + u) \text{ sur } \partial\Omega \\ u(., 0) &= 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.2)$$

Le solide est supposé suivre une loi élastique linéaire, la loi de comportement s'écrit :

$$\sigma_{ij} = \lambda \left(\sum_{k=1}^2 \mathcal{E}_{kk}(u) \right) \delta_{ij} + 2\mu \mathcal{E}_{ij}(u), \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

où, λ et μ sont les coefficients de Lamé. D'une façon équivalente, nous avons :

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1+\nu}{E} \sigma(u) - \frac{\nu}{E} \text{trace} \sigma(u) I.$$

où E est le module de Young, ν coefficient de Poisson et I est le tenseur identité. Les relations suivantes deviennent :

$$\frac{\nu}{E} = \frac{\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)}, \quad \frac{1 + \nu}{E} = \frac{1}{2\mu}$$

Afin de donner une formulation variationnelle du problème (1.2) on multiplie par une fonction $v_i \in V$ la première équation de (1.2), on somme de 1 à 2 et on intègre par parties, alors la formulation variationnelle est donnée par :

$$a(u, v) = b(u, v)$$

avec la forme bilinéaire $a(., .) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$a(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} (\lambda + 2\mu) \mathcal{E}_{kk}(\varphi) \mathcal{E}_{ll}(\psi) + 2\mu \mathcal{E}_{ij}(\varphi) \mathcal{E}_{ij}(\psi)$$

et la forme linéaire $b(., .) : V \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par :

$$\forall \psi \in V, \quad b(\varphi, \psi) = \int_{\partial\Omega} \sum_{k=1}^2 f_k(I + \varphi) \psi_k d\xi,$$

Alors l'énergie élastique peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$E_{elastique} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j} \sigma_{ij} \mathcal{E}_{ij}(u) dx \quad (1.3)$$

et l'expression de l'énergie externe est :

$$E_{donnees} = \int_{\partial\Omega} f(I+u)v ds \quad (1.4)$$

La segmentation est conduite en cherchant un minimum de l'énergie fonctionnelle suivante :

$$E(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \int_{\partial\Omega} f(I+v)v. \quad (1.5)$$

L'inégalité de Korn (Voir [59] Theorem 3.5 p. 37 ou [24] p. 298) implique que la forme bilinéaire a est V -coercive.

1.2.3 Système de Lamé

Puisque les forces dépendent du déplacement alors le problème (1.5) est semi-linéaire, on ne peut donc pas résoudre le problème directement. Nous proposons d'utiliser un schéma pseudo-stationnaire afin de résoudre l'équation en considérant une série de problèmes linéaires. On introduit un paramètre τ et on considère un problème pseudo-stationnaire par rapport à τ dérivé du problème original. On trouve alors la solution comme la limite asymptotique du problème stationnaire lorsque τ tend vers l'infini (voir les prochaines sections). Dans ce qui suit, seul le système de lamé quasi-statique sera étudié. Pour toute fonction $u : (0, \infty) \rightarrow V$, nous considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) - Au(t) &= 0 \text{ dans } \Omega \\ \mu \partial_n u(t) + (\lambda + 2\mu) \operatorname{div}(u(t))n &= f(I+u) \text{ sur } \partial\Omega \\ u(0) &= 0 \text{ dans } \Omega \end{cases} \quad (1.6)$$

où A est l'opérateur d'élasticité associé aux problème (1.2). La formulation variationnelle du problème (1.6) est donnée par :

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt}u, \varphi \right) + a(u, \varphi) &= b(u, \varphi) \text{ pour tout } \varphi \in V \\ u &= 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

avec a est la forme bilinéaire associée à l'opérateur d'élasticité A et $b(u, \varphi) = \int_{\partial\Omega} f(I+u)\varphi$.

Le théorème suivant donne l'existence et l'unicité de la solution du problème (1.6).

Théorème 1.1 *Supposons les hypothèses H1 et H2 satisfaites. Alors il existe une unique solution $u \in L^2_{loc}(0, \infty; (H^2(\Omega))^2 \cap V) \cap C^0(0, \infty; V)$; $\frac{d}{dt}u \in L^2_{loc}(0, \infty; H)$ de (1.6).*

Pour prouver l'existence de la solution $u \in L^2_{loc}(0, \infty; V \cap (H^2(\Omega))^2) \cap C^0(0, \infty; V)$ avec $\frac{d}{dt}u \in L^2_{loc}(0, \infty; H)$, nous utilisons une méthode de Galerkin en considérant la suite des sous espaces vectoriels de dimension finie indexée par $m \in \mathbb{N}^*$

$$V_m = \operatorname{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\} \subset V \quad (1.8)$$

où $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$ sont les fonctions propres associées à l'opérateur d'élasticité A , et nous projetons le problème (1.6) dans ces espaces. La formulation approchée est donnée par :

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} u_m, \varphi_i \right) + a(u_m, \varphi_i) = b(u_m, \varphi_i) \text{ pour } 1 \leq i \leq m \\ u_m(0) = 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

L'existence sera montrée en utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz pour un système d'équations différentielles ordinaires dans \mathbb{R}^m . Des estimations a priori nous permettent de passer à la limite lorsque m tend vers l'infini. Donnons quelques résultats intermédiaires qui nous seront utiles.

Lemme 1.1 *Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe une unique famille de fonctions $\{u_i\}_i^m \in C^1(0, \infty; \mathbb{R})$, telle que, $u_m(t) = \sum_{i=1}^m u_i(t) \varphi_i$ est solution de :*

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} u_m(t), \varphi_i \right) + a(u_m(t), \varphi_i) = b(u_m(t), \varphi_i) \text{ pour } 1 \leq i \leq m \\ u_m(0) = 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Preuve. Remplaçons $u_m(t, x) = \sum_{i=1}^m u_i(t) \varphi_i(x)$ dans (1.9), on obtient :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m (\varphi_j(x), \varphi_i(x)) \frac{d}{dt} u_j(t) + \sum_{j=1}^m a(\varphi_j(x), \varphi_i(x)) u_j(t) = \\ b(\sum_{j=1}^m \varphi_j(x) u_j(t), \varphi_i(x)) \text{ pour } 1 \leq i \leq m \\ u_i(0) = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq m. \end{cases} \quad (1.11)$$

On définit les matrices et les vecteurs suivants :

$$\begin{cases} U(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))^t \\ \mathcal{A}_{ij} = a(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) \\ M_{ij} = (\varphi_j(x), \varphi_i(x)) \\ G(U(t))_i = \int_{\partial\Omega} \sum_{p=1}^3 f_p(x + \sum_{k=1}^m \varphi_k(x) u_k(t)) (\varphi_i)_p(x) d\xi. \end{cases}$$

Alors la forme matricielle du problème (1.11) s'écrit :

$$\begin{cases} MU'(t) + \mathcal{A}U(t) = G(U(t)) \\ U(0) = 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

Pour résoudre le problème (1.12) il est suffisant de montrer que G est Lipschitzienne. Remarquons tout d'abord que

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}; \quad a(\varphi_i, \varphi_j) = \lambda_i \delta_{ij}, \text{ pour } 1 \leq i, j \leq m.$$

car l'ensemble des vecteurs propres $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ de A^{-1} forme une base orthonormale dans H , et orthogonale dans V pour le produit scalaire induit par A et orthogonale pour le produit scalaire de dualité.

Soit maintenant, $U, V \in \mathbb{R}^m$ alors

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq m} |G_i(U) - G_i(V)| &= \max_{1 \leq i \leq m} \left| \int_{\partial\Omega} \sum_{p=1}^3 f_p(I + U) - f_p(I + V) \varphi_{ip} d\xi \right| \\ &\leq M_f C(m, \Omega) \max_{1 \leq k \leq m} |(U_k - V_k)|. \end{aligned}$$

donc le problème (1.12) se réduit à un système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} u_j(t) + \lambda_j u_j(t) = G_j(u_1(t), \dots, u_m(t)) \right. \\ \left. u_j(t) = 0 \right. \end{cases} \quad (1.13)$$

Le théorème VII.3 dans [17] p.104 s'applique et nous avons l'existence et l'unicité de $U(t)$. \square

Nous donnons maintenant des estimations a priori de u_m indépendantes de m .

Lemme 1.2 *Pour tout $0 < t$, il existe une constante $0 < C_1$ indépendante de m et t telle que :*

$$\max_{0 \leq s \leq t} \|u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_1. \quad (1.14)$$

Preuve. On utilise le fait que f est majorée par M_f , et en choisissant $\varphi = u_m$ dans (1.10), pour tout $0 < \eta$, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(u_m(s), u_m(s)) &= \int_{\partial\Omega} f(I + u_m(s)) u_m(s) \\ &\leq \int_{\partial\Omega} M_f |u_m(s)| d\xi \\ &\leq \frac{\eta}{2} \|u_m(s)\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 + \frac{1}{2\eta} M_f^2 |\partial\Omega|. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Le théorème de trace et l'inégalité de Korn fournissent les majorations suivantes (voir[24]) :

$$\begin{aligned} C_\Omega \|u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq a(u_m(s), u_m(s)) \\ \|u_m(s)\|_{L^j(\partial\Omega)}^2 &\leq C_{\partial\Omega} a(u_m(s), u_m(s)) \quad 1 \leq j \leq 2. \end{aligned}$$

On choisit, η vérifiant $\frac{1}{2} < 1 - \frac{C_{\partial\Omega}\eta}{2}$, et notons par $|\partial\Omega|$ la mesure de $\partial\Omega$, alors on déduit de (1.15) :

$$\frac{d}{dt} \|u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_\Omega \|u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\eta} M_f^2 |\partial\Omega|. \quad (1.16)$$

Le lemme de Gronwall fournit :

$$\|u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^s \exp(-C_\Omega(s-\tau)) d\tau \frac{1}{\eta} M_f^2 |\partial\Omega|. \quad (1.17)$$

d'où le résultat. \square

Lemme 1.3 *Il existe deux constantes $0 < C_2$ et $0 < C_3$ indépendantes de m et de t telles que :*

$$\begin{cases} \max_{0 \leq s \leq t} \int_0^s \frac{1}{2} \left\| \frac{d}{d\tau} u_m(\tau) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau &\leq C_2 \\ \max_{0 \leq s \leq t} \|u_m(s)\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq C_2; \\ \int_0^t \|u_m(\tau)\|_{H^2(\Omega)}^2 d\tau &\leq C_3. \end{cases} \quad (1.18)$$

Preuve. Remplaçons la fonction test par $\varphi = \frac{d}{dt} u_m$ dans (1.10), et intégrons entre 0 et s et sur Ω . En utilisant l'hypothèse H2 sur la structure du gradient de f , nous avons

$$\int_0^s \int_{\partial\Omega} f(u_m(\tau)) \frac{d}{d\tau} u_m(\tau) d\xi d\tau = - \int_{\partial\Omega} F(u_m(s)) d\xi + \int_{\partial\Omega} F(0) d\xi \quad (1.19)$$

et en tenant compte du fait que

$$\begin{aligned} \int_0^s \int_{\Omega} a(u_m(\tau), \frac{d}{d\tau} u_m(\tau)) d\tau dx &= \frac{1}{2} \int_0^s \int_{\Omega} \frac{d}{d\tau} a(u_m(\tau), u_m(\tau)) d\tau dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(u_m(s), u_m(s)) \\ &\geq \frac{C}{2} \|u_m(s)\|_{H^1(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

il résulte que

$$\int_0^s \left\| \frac{d}{d\tau} u_m(\tau) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau + \frac{C}{2} \|u_m(s)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \int_{\partial\Omega} F(u_m(s)) d\xi = \int_{\partial\Omega} F(0) d\xi. \quad (1.20)$$

La fonction F est non négative (Hypothèse H2), alors, nous obtenons les deux premières inégalités avec $C_2 = M_f |\partial\Omega|$.

Maintenant pour montrer la troisième inégalité, multiplions la première équation de (1.6) par $Au(t)$ et intégrons sur Ω et par rapport au temps. Nous utilisons l'inégalité de Hölder, nous obtenons :

$$\int_0^s \|Au_m(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \leq \int_0^s \left\| \frac{d}{d\tau} u_m(\tau) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \leq C_2. \quad (1.21)$$

L'opérateur d'élasticité linéaire A est uniformément elliptique, nous avons par ([57] p. 260) et le théorème de trace :

$$\int_0^s \|u_m(\tau)\|_{H^2(\Omega)}^2 d\tau - C_2 \int_0^s \|u_m(\tau)\|_{H^1(\Omega)}^2 d\tau \leq \int_0^s \|Au_m(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau, \quad (1.22)$$

Les estimations obtenues précédemment nous permettent d'établir la dernière inégalité.
□

Les estimations obtenues sont résumées dans le lemme suivant :

Lemme 1.4 *Il existe K_1 un borné de $L^2_{loc}(0, \infty; H)$, K_2 un borné de $L^\infty(0, \infty; V)$ et K_3 un borné de $L^2_{loc}(0, \infty; ((H^2(\Omega))^2 \cap V))$ tels que :*

$$\left\{ \frac{d}{dt} u_m \right\}_{m=1}^\infty \subset K_1; \quad \{u_m\}_{m=1}^\infty \subset K_2; \quad \{u_m\}_{m=1}^\infty \subset K_3. \quad (1.23)$$

Il existe $u \in L^\infty(0, \infty; V) \cap L^2_{loc}(0, \infty; (H^2(\Omega))^2 \cap V) \cap C^0(0, \infty; V)$ telle que : Pour tout $0 < T$,

$$\begin{aligned} \int_0^T (u_m(s), \varphi(s))_H ds &\rightarrow \int_0^T (u(s), \varphi(s))_H ds \quad \forall \varphi \in L^1(0, T; H); \\ \int_0^T (u_m(s), \varphi(s))_{V', V} ds &\rightarrow \int_0^T (u(s), \varphi(s))_{V', V} ds \quad \forall \varphi \in L^1(0, T; V); \\ \int_0^T a(u_m(s), \varphi(s)) ds &\rightarrow \int_0^T a(u(s), \varphi(s)) ds \quad \forall \varphi \in L^1(0, T; V); \\ \frac{d}{dt} (u_m, \varphi)_H &\rightarrow \frac{d}{dt} (u, \varphi)_H \quad \forall \varphi \in H \text{ dans } \mathcal{D}'(0, \infty). \end{aligned} \quad (1.24)$$

La dernière étape consiste à montrer que u est solution du problème (1.6). Pour cela prenons la limite dans la formulation variationnelle (1.10). Pour pouvoir passer à la limite dans la formulation variationnelle (1.10), il faut pouvoir passer à la limite dans les termes non linéaires $f(I + u_m)$. Puisque Ω est borné, l'injection de $H^2(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ est compacte, on déduit que pour tout $0 < T$ et par le théorème de trace ([72]) :

$$\{\varphi \in L^2(0, T; ((H^2(\Omega))^2 \cap V), \frac{d}{dt} \varphi \in L^2(0, T; H)\}$$

Pour tout $0 < t < T$, $u_m(t, x) \rightarrow u(t, x)$ pour presque tout $x \in \partial\Omega$, et comme f est continue, à une sous suite près, nous avons

$$f(x + u_m(t, x)) \rightarrow f(x + u(t, x))$$

pour tout t et pour tout $x \in \partial\Omega$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue s'applique car $K_3 \subset L^\infty((0, \infty) \times \Omega)$ et nous obtenons :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} b(u_m, \varphi) \rightarrow b(u, \varphi) \forall \varphi \in (L^2(\partial\Omega))^2.$$

L'unicité est montrée d'une manière classique, en faisant la différence entre deux solutions, et puisque la fonction f est bornée, nous obtenons une estimation a priori pour la norme L^2 de la différence et de sa dérivée temporelle. Le lemme de Gronwall s'applique et l'unicité est avérée puisque les deux solutions ont la même condition initiale.

1.2.4 Existence d'une solution du problème stationnaire

Dans cette section, nous définissons le problème stationnaire, et nous démontrons l'existence d'une solution $\bar{u} \in V$ à ce problème.

Définition 1.1 *La fonction $\bar{u} \in V$ est solution du problème stationnaire si elle vérifie :*

$$a(\bar{u}, \varphi) = b(\bar{u}, \varphi), \forall \varphi \in V. \quad (1.25)$$

Théorème 1.2 *Supposons les hypothèses H1 et H2 satisfaites, alors il existe un unique $\bar{u} \in V$ solution du problème (1.25).*

Preuve. On utilise une méthode de Galerkin et le théorème de point fixe de Brouwer (voir par exemple [72]).

Introduisons l'opérateur T :

$$\begin{aligned} T : V_m &\longrightarrow V_m \\ \bar{u}_n &\mapsto \bar{u}_{n+1} = T\bar{u}_n, \text{ satisfaisant} \\ a(\bar{u}_{n+1}, \varphi) &= b(\bar{u}_{n+1}, \varphi) \forall \varphi \in V_m. \end{aligned} \quad (1.26)$$

En choisissant $\varphi = \bar{u}_{n+1}$ dans l'équation ci-dessus, on obtient l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} a(\bar{u}_{n+1}, \bar{u}_{n+1}) &= b(\bar{u}_{n+1}, \bar{u}_{n+1}), \\ a(\bar{u}_{n+1}, \bar{u}_{n+1}) &\leq \int_{\partial\Omega} M_f |\bar{u}_{n+1}| \leq \frac{\eta}{2} \|\bar{u}_{n+1}\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 + \frac{1}{2\eta} M_f^2 |\partial\Omega| \end{aligned}$$

En choisissant $\eta = \frac{C}{C_{\partial\Omega}}$, où C est la constante de l'inégalité de Korn, nous avons :

$$\|\bar{u}_{n+1}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{C_{\partial\Omega} |\partial\Omega| M_f^2}{C^2}.$$

Soit K le convexe de V_m défini par :

$$K = \left\{ \varphi \in V_m, \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{C_{\partial\Omega} |\partial\Omega| M_f^2}{C^2} \right\}$$

Nous en déduisons que $T : K \rightarrow K$ est un opérateur lipschitzien de constante $\sqrt{M_f C_{\partial\Omega}}$. Le théorème de point fixe de Brouwer ([42] Lemme 10.3 p. 238) fournit l'existence d'un point fixe $\bar{u}_n \in K$ vérifiant : $T\bar{u}_n = \bar{u}_{n+1}$.

Prenons maintenant la limite quand m tend vers l'infini. Notons par \bar{u}_m le point fixe dans V_m . Nous avons :

$$\|\bar{u}_m\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{C_{\partial\Omega} |\partial\Omega| M_f^2}{C^2}.$$

Le théorème de la faible séquentielle compacité de la boule unité d'un espace de Banach réflexif, fournit l'existence de $\bar{u} \in V$, et d'une sous suite extraite de $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ convergente faiblement dans V vers \bar{u} . Pour passer à la limite nous raisonnons de la même manière que dans la section précédente, nous prouvons que \bar{u} est une solution du problème (1.25).

Pour l'unicité, puisque le problème (1.25) est équivalent au problème d'optimisation suivant :

$$\min_{v \in V} \frac{1}{2} a(v, v) - b(v, v)$$

alors le problème (1.25) admet une solution unique.

□

1.2.5 Comportement asymptotique en temps

Dans cette section nous démontrons le résultat suivant :

Théorème 1.3 *Supposons les hypothèses H1 et H2 satisfaites. Alors la solution $u(t)$ du problème (1.6) donnée au théorème 1.1 converge lorsque t tend vers l'infini vers $\bar{u} \in V$ solution du problème stationnaire donnée au théorème 1.2.*

Preuve.

Comme la solution du problème stationnaire minimise une énergie, on utilise la démonstration faite dans [38], où on utilise la structure de gradient flot des équations ainsi on utilise la proposition 2.6 dans [38], alors on a que $u(t)$ converge vers la solution du problème stationnaire lorsque t tend vers l'infini. □

1.3 Problème de perturbation singulière

Nous tenons à imposer que les contours du modèle à la convergence passent par les zéros du champ de force f . La formulation standard du GDE n'impose pas cette condition, elle cherche un compromis entre la minimisation de $E_{elastique}$ et $E_{donnees}$. Nous proposons dans cette partie une méthode pour trouver un minimum global du deuxième terme, tout en gardant une déformation raisonnable au sens de l'a priori. Cette méthode est appelée méthode de perturbation singulière qui satisfait la contrainte de $f(u + I) = 0$ pour laquelle la convergence est démontrée. Introduisons l'hypothèse H3 :

- H3 La fonction $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ est régulière, intégrable sur \mathbb{R}^+ , décroissante et pour $\eta > 0$, $\alpha(t) \geq \eta(T)$ pour $t \in [0, T]$, vérifiant $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = 0$. En outre, $\sqrt{\alpha}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ , et vérifie :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \int_s^t \sqrt{\alpha(\tau)} d\tau ds = 0$$

Le problème que nous considérons est alors :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u(t) - \alpha(t) A u(t) & = 0 \text{ dans } \Omega \\ \alpha(t) (\mu \partial_n u(t) + (\lambda + 2\mu) \operatorname{div} (u(t)) n) & = f(I + u) \text{ sur } \partial\Omega \\ u(0) & = 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.27)$$

Théorème 1.4 *Supposons les hypothèses H1, H2 et H3 satisfaites. Alors pour tout $0 < T$ il existe une unique solution $u \in L^2(0, T; ((H^2(\Omega))^2 \cap V) \cap C^0(0, T; V)$; $\frac{d}{dt} u \in L^2(0, T; H)$ solution du problème (1.27).*

Preuve. Puisque la fonction α est non négative et minorée par une constante positive sur tout compact de R^+ , on raisonne comme à la section 2, on trouve le résultat. \square

Dans la pratique, on peut choisir la fonction α comme la fonction $\exp(-\beta t)$ qui satisfait toutes les hypothèses et β doit être choisi de telle sorte que la fonction exponentielle varie lentement par rapport à $f(I + u)$.

La solution des équations d'équilibre introduites précédemment appartient à un espace fonctionnel de dimension infinie. On ne peut donc trouver une expression analytique de cette solution, même si on a démontré son existence, car il s'agit d'un problème continu dont les solutions appartiennent à un espace fonctionnel de dimension infinie. On a donc recours à une méthode d'approximation pour se ramener à un espace vectoriel de dimension finie, qui a la particularité d'être de dimension finie donc d'avoir une base et de permettre d'obtenir une expression de la solution en résolvant numériquement un système fini d'équations. De nombreuses méthodes ont été développées pour résoudre ce genre de problème, la plus connue étant la méthode des éléments finis (MEF), que nous utilisons dans notre travail. Le domaine Ω est approché par un polyèdre divisé en éléments triangulaires, le déplacement est approché par des fonctions linéaires sur ces éléments et les forces sont évaluées aux point du maillage. Pour M et N fixés, un pas de temps et un pas d'espace sont définis respectivement par : $\Delta t = \frac{T}{N}$; $\Delta x = \frac{1}{M}$. Si AU représente une formulation variationnelle discrète des équations de l'élasticité, et $f(U)$ représente le champ de force venant de l'image, nous avons à résoudre $AU = f(U)$. Puisque cette équation est non-linéaire, le problème $\frac{dt}{dt}U + AU = f(U)$ est approché avec le schéma d'Euler : $U^{n+1} + \Delta t AU^{n+1} = U^n + \Delta t f(U^n)$. L'opérateur A réduit la capacité du gabarit à être déformé, par conséquent, un coefficient décroissant de régularisation est introduit devant A . Nous illustrons la stratégie de perturbation singulière proposée avec un exemple 1D. Le signal cible $s = \exp(-2x)\cos(\frac{\pi}{2}x) + \sin(2\frac{\pi}{2}x)$ contaminé du bruit à supprimer est l'équivalent 1D des données de contour de l'objet, le champ de force est $f(U) = \text{sign}(s - U)\sqrt{|s - U|}$, $U(0) = 0$ est le modèle initial, et l'opérateur de régularisation est $AU = -\frac{d^2U}{dx^2}$. La stratégie de perturbation singulière consiste à introduire la fonction $\alpha = \exp(-\beta\tau)$ en face de l'opérateur A . la figure 1, représente le résultat. Remarquons que cette stratégie permet de détecter le contour de l'objet avec précision.

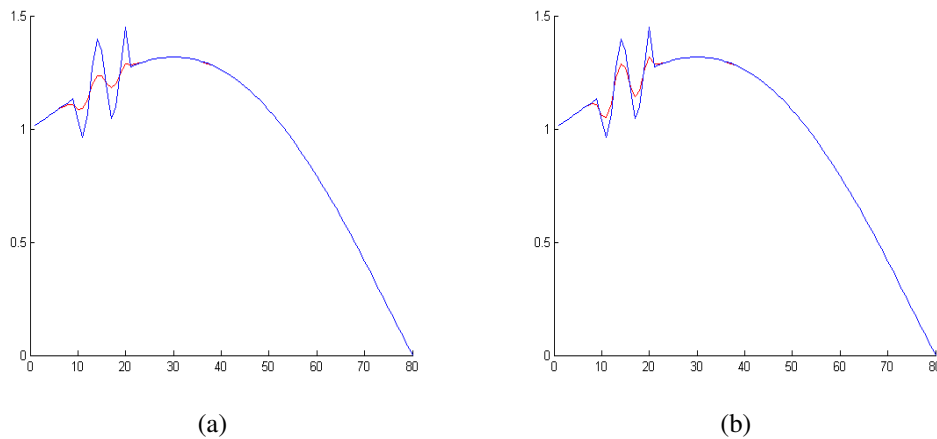


FIGURE 1.1 – (a) Résultat sans perturbation singulière, (b) Résultat avec perturbation singulière $\beta = .3$

1.3.1 Comportement asymptotique en temps

Théorème 1.5 *Supposons les hypothèses H1, H2 et H3 satisfaites. Alors la solution $u(t)$ du problème (1.27), dont l'existence est donnée au théorème 1.4 converge vers $\bar{u} \in H$ lorsque t tend vers l'infini, $\bar{u} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t u(s) ds$, et*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(I + u(t)) = 0, \text{ dans } \left(H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \right)^2. \quad (1.28)$$

Preuve. La formulation variationnelle du système (1.27) est donnée par :

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} u, \varphi \right) + \alpha(t) a(u, \varphi) &= b(u, \varphi) \text{ pour tout } \varphi \in V \\ u &= 0. \end{cases} \quad (1.29)$$

Prenons $\varphi = \frac{d}{dt} u$ dans (1.29) et intégrons sur Ω et en utilisant la formule de Green, il vient :

$$\int_{\Omega} \frac{d}{dt} u(t) \frac{d}{dt} u(t) + \alpha(t) a(u(t), \frac{d}{dt} u(t)) = b(u(t), \frac{d}{dt} u(t)). \quad (1.30)$$

Alors

$$\left\| \frac{d}{dt} u(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha(t)}{2} \frac{d}{dt} a(u(t), u(t)) = - \int_{\partial\Omega} \frac{d}{dt} F(u(t)) d\xi. \quad (1.31)$$

Intégrons entre 0 et $t < T$, et par parties le second membre, nous avons,

$$\begin{aligned} \int_0^t \left\| \frac{d}{ds} u(s) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds - \int_0^t \frac{\alpha'(s)}{2} a(u(s), u(s)) ds + \frac{\alpha(t)}{2} a(u(t), u(t)) \\ + \int_{\partial\Omega} F(u(t)) d\xi = \frac{\alpha(0)}{2} a(u(0), u(0)) + \int_{\partial\Omega} F(0) d\xi. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Il existe deux constantes $C_7 = M_f |\partial\Omega|$ et $C_8 = 2C_7/C$, telles que

$$\left\| \frac{d}{ds} u(s) \right\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))} \leq C_7; \quad \left\| \sqrt{\alpha(t)} u(t) \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_8. \quad (1.33)$$

Prenons $\varphi \in (H_0^1(\Omega))^2$ dans (1.29), en intégrant sur Ω et en utilisant la formule de Green, nous avons

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \frac{d}{dt} u(t) \varphi dx \right| &\leq \sqrt{\alpha(t)} |a(\sqrt{\alpha(t)} u(t), \varphi)| \\ &\leq \sqrt{\alpha(t)} \sqrt{C_8} (\lambda + 2\mu) \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Comme $\frac{du}{dt}$ est dans $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ pour tout $T > 0$, on a donc

$$\int_{\Omega} \frac{d}{dt} u \varphi dx \rightarrow 0 \text{ p.p.}$$

lorsque t tend vers l'infini pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Nous en déduisons que $\frac{d}{dt} u(t)$ tend vers zéro quant t tend vers l'infini à un ensemble de mesure nulle prés.

Prenons maintenant $\varphi \in (H^1(\Omega))^2$ dans (1.29), nous avons :

$$\left| \int_{\partial\Omega} f(I + u(t)) \varphi d\xi \right| \leq \left| \int_{\Omega} \frac{d}{dt} u(t) \varphi dx \right| + \sqrt{\alpha(t)} |a(\sqrt{\alpha(t)} u(t), \varphi)|. \quad (1.35)$$

Comme H_0^1 est dense dans $L^2(\Omega)$, on en déduit la convergence p.p du côté droit de l'expression précédente lorsque t tend vers l'infini pour tout $\varphi \in L^2(\Omega)$. Comme $u(t) \in C^0(0, \infty; H)$, et comme f est continue, on déduit que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(I + u(t)) = 0, \text{ dans } (H^{-1/2}(\partial\Omega))^2.$$

La fonction $u \in C^0(0, \infty; V)$ appartient donc à $C^0(0, \infty; H)$. Posons $\bar{u} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t u(s) ds$, ensuite nous allons montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \bar{u}$ dans $(H^{-1}(\Omega))^2$.

Nous avons :

$$\begin{aligned} & \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}=1} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{t} \int_0^t u(s) ds - u(t) \right) \varphi dx = \\ & \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}=1} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{t} \int_0^t \int_s^t \frac{1}{\tau} u(\tau) d\tau ds \right) \varphi dx \\ & \leq \sqrt{C_8} (\lambda + 2\mu) \frac{1}{t} \int_0^t \int_s^t \sqrt{\alpha(\tau)} d\tau ds \end{aligned} \quad (1.36)$$

L'hypothèse H3 nous permet de conclure.

Maintenant, un argument lié à la compacité est invoqué pour prouver que, pour presque tous t , la convergence a lieu dans $L^2(\Omega)$. On définit $\varphi_n(t) =$

$$\begin{cases} 1; & 0 \leq t \leq n \\ n+1-t; & n \leq t \leq n+1 \\ 0; & \text{sinon;} \end{cases} \quad \text{et}$$

$$u_n(t) = \varphi_n(t)u(t).$$

Soit $\epsilon > 0$ fixé, il existe R_ϵ tel que $\forall t > R_\epsilon$ $\|u(t) - \bar{u}\|_{H^{-1}(\Omega)} < \epsilon$. Soit $T > R_\epsilon$, $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(0, T; H)$ et $\frac{du_n}{dt}$ est borné dans $L^2(0, T; H)$. Le théorème 1 dans [70] s'applique, et il existe $\underline{u} \in L^2(0, T; H)$ et une sous-suite $\{n_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ telle que $u_{n_p} \rightarrow \underline{u}$ dans $L^2(0, T; H)$ et, à un ensemble de mesure nulle de $(0, T)$, $u_{n_p}(t) \rightarrow \underline{u}(t)$ dans $L^2(\Omega)$. Notons que pour $n_p > E(R_\epsilon) + 1$ nous avons $u_{n_p}(t) = u(t)$. Pour presque tout $t > R_\epsilon$, nous avons

$$\|u(t) - \underline{u}(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq \|u(t) - \underline{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \epsilon. \quad (1.37)$$

On en déduit que pour presque tous t , $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \bar{u}$ dans H .

□

Remarque. La fonction \bar{u} n'est pas une solution du problème (1.5) mais elle satisfait la contrainte d'être un zéro de f au sens faible. □

1.4 Le cas d'une séquence d'images périodique

Dans cette section nous considérons le cas d'une séquence d'images périodique. Donnons tout d'abord une formulation mathématique du problème. Pour une donnée $f(t, z)$ périodique de période T (ie $\forall t, f(t+T, \cdot) = f(t, \cdot)$), vérifiant les hypothèses H1 et H2, nous cherchons $u(t)$ solution de :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u(t) - Au(t) & = 0; \text{ dans } \Omega & 0 < t < T \\ \mu \partial_n u(t) + (\lambda + 2\mu) \operatorname{div} (u(t))n & = f(t, I + u) \text{ sur } \partial\Omega & 0 < t < T \\ u(0) & = u(T) \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.38)$$

Pour montrer l'existence et l'unicité de solutions au problème (1.38), nous procédons comme à la section 1.2.3. Nous introduisons un sous espace de dimension finie H_m engendré par les $\{w_i\}_{i=1}^m$, et nous considérons l'opérateur S_m défini par :

$$\begin{cases} S_m : H & \rightarrow H \\ u(0)_m & \rightarrow v(T) \end{cases} \quad (1.39)$$

où v est la solution du problème (1.38) avec comme condition initiale $u(0)_m$. La solution du problème (1.38) n'est autre qu'un point fixe de S_m . Notons que $u(0)_m$ est la projection de u_0 sur V_m . En utilisant le théorème du point fixe de Brouwer, nous avons.

Theorème 1.6 *Supposons les hypothèses H1 et H2 satisfaites, ainsi que la condition de périodicité de la fonction f . Alors pour $u_m(0)$ vérifiant,*

$$\|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{M_f^2 |\partial\Omega|}{2C_\Omega \eta (1 - \exp(-C_\Omega T))}$$

l'application $S_m : u_m(0) \mapsto v(T)$ admet au moins un point fixe, c'est à dire que l'on a une solution périodique dans $C^0(0, T; H_m)$.

Preuve. La preuve se fait à l'aide du point fixe de Brouwer comme à la section 1.2.3. le lemme 1.1 montre que l'opérateur est bien défini. L'estimation (1.16) permet avec le lemme de Gronwall d'écrire, avec η tel que $\frac{1}{2} < 1 - C_{\partial\Omega} \frac{\eta}{2}$:

$$\|u_m(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \exp(-C_\Omega T) \|u(0)_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \exp(-C_\Omega(T-\tau)) d\tau \frac{1}{2\eta} M_f^2 |\partial\Omega|, \quad (1.40)$$

Soit $C_m^2 = \|u(0)_m\|_{L^2(\Omega)}^2$, satisfaisant

$$C_m^2 \leq \frac{M_f^2 |\partial\Omega|}{2C_\Omega \eta (1 - \exp(-C_\Omega T))}.$$

alors l'application S_m envoie la boule $B(0, C_m) \subset H_m$ dans $B(0, C_m)$ grâce à l'inégalité (1.40).

□ Pour l'unicité de la solution, donnons le lemme suivant :

Lemme 1.5 *Supposons les hypothèses H1, H2 et H3 satisfaites. alors si*

- $u(0) = 0$;
- ou si Df est semi-définie négative ;
- ou si

$$K_{Df} = \sup_{x \in \partial\Omega; z \in B(0, C_m)} \rho(Df(x+z)) \leq \frac{1}{C_{\partial\Omega}}, \quad (1.41)$$

où ρ désigne le rayon spectral.

Alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'opérateur S_m a un unique point fixe.

Preuve.

Supposons que nous ayons deux points fixes distincts u_{m_1} et u_{m_2} . Notons $v = u_{m_1} - u_{m_2}$. En utilisant la propriété de dérivabilité de f nous déduisons que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|v(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(v(s), v(s)) & \leq \int_{\partial\Omega} (f(I + u_{m_1}(s)) - f(I + u_{m_2}(s))) v(s) d\xi \\ & \leq \int_{\partial\Omega} \int_0^1 Df(I + u_{m_1}(s) + \tau(u_{m_1}(s) - u_{m_2}(s))) v(s) d\tau v(s) d\xi. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Si la dérivée de f définit une forme semi définie négative, alors nous obtenons l'unicité des solutions en posant : $\varphi(s) = \|v(s)\|_{L^2(\Omega)}^2$, puisque nous déduisons de (1.42) que la fonction φ est strictement décroissante ce qui contredit $\varphi(T) = \varphi(0)$. Sans supposer que la dérivée de f est semi-définie négative, notons $K_{Df} = \sup_{x \in \partial\Omega; z \in B(0, C_m)} \rho(Df(x + z)) \leq \frac{1}{C_{\partial\Omega}}$, où ρ désigne le rayon spectrale. Ainsi comme

$$0 < 1 - K_{Df}C_{\partial\Omega},$$

L'estimation (1.42) permet d'obtenir

$$\frac{d}{ds}\varphi(s) + \rho(1 - K_{Df}C_{\partial\Omega})\varphi(s) \leq 0.$$

En intégrant entre 0 et T , notant $k = \rho(1 - K_{Df}C_{\partial\Omega})$ nous avons $(\exp kT - 1)\varphi(T) \leq 0$, ce qui montre que $\varphi(T) = 0$. \square

1.4.1 Méthode quasistationnaire pour les solutions périodiques

Dans cette partie, nous montrons que la méthode quasistationnaire permet de calculer une solution du problème (1.38). Considérons maintenant la fonction $v : (0, \infty) \rightarrow L_p^2(0, T; V)$ comme une fonction de τ , un paramètre, à valeurs dans les fonctions périodiques de $L^2(0, T; V)$ qui vérifie :

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}v(\tau) + \partial_t v(\tau) - Av(\tau) &= 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega \\ \mu \partial_n v(\tau) + (\lambda + 2\mu) \operatorname{div}(v(\tau))n &= f(t, I + v(\tau)) \text{ dans } (0, T) \times \partial\Omega \\ v(\tau, 0, x) &= v(\tau, T, x) \text{ dans } (0, \infty) \times \Omega \\ v(0) &= 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega. \end{cases} \quad (1.43)$$

Nous montrons l'existence de solutions au problème (1.43) en utilisant la théorie des semi-groupes non linéaires. Pour cela introduisons quelques notations. Nous posons $Q = (0, T) \times \Omega$; et $D = (0, \infty) \times Q$. Le domaine de l'opérateur A_p

$$\left(\begin{array}{l} \frac{d}{dt} \cdot - A \cdot \text{ dans } Q \\ \mu \partial_n \cdot + \lambda \operatorname{div}(\cdot)n \text{ dans } (0, T) \times \partial\Omega \\ \text{periodique en temps} \end{array} \right) \text{ est :}$$

$$\{\varphi \in L^2(0, T; V \cap (H^2(\Omega))^2) \cap H^1(0, T; H) \text{ periodique en temps.}\}$$

Donnons maintenant quelques résultats techniques. Soit $\Lambda \in \mathbb{R}^+$ et $N \in \mathbb{N}$ fixé, posons $\tau_1 = \frac{\Lambda}{N}$ et considérons la suite des fonctions $\{V_n^{\tau_1}\}_{n=0}^N \subset L_p^2(0, T; V)$ vérifiant :

$$\begin{cases} V_{n+1}^{\tau_1} - V_n^{\tau_1} + \tau_1 A_p V_{n+1}^{\tau_1} &= 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega \\ \mu \partial_n V_{n+1}^{\tau_1} + (\lambda + 2\mu) \operatorname{div}(V_{n+1}^{\tau_1})n &= f(t, I + V_{n+1}^{\tau_1}); \text{ dans } (0, T) \times \partial\Omega \\ V_{n+1}^{\tau_1}(0, x) &= V_{n+1}^{\tau_1}(T, x) \text{ dans } \Omega \\ V_0^{\tau_1} &= 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega. \end{cases} \quad (1.44)$$

Lemme 1.6 *Supposons les hypothèses H1, H2 et H3. Alors pour tout, $0 < n \leq N$, il existe $V_{n+1}^{\tau_1} \in L_p^2(0, T; V \cap (H^2(\Omega))^2) \cap H^1(0, T; H)$.*

Preuve. En reprenant la démonstration du théorème 1.6 car l'opérateur A_p diffère de l'opérateur A par un terme d'ordre zéro qui est non négatif, alors nous obtenons le résultat énoncé. \square

Donnons maintenant des estimations a priori qui nous permettent de montrer l'existence d'une solution dans $C^0(0, \Lambda; L_p^2(0, T; H))$ du problème (1.43).

Lemme 1.7 *Supposons les hypothèses H1, H2 et H3 satisfaites, alors pour tout $0 < p, q, m \leq N$, nous avons :*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T a(V_p^{\tau_1}, V_p^{\tau_1}) + \int_{\partial\Omega} F(V_p^{\tau_1}) d\xi dt \leq \int_0^T \int_{\partial\Omega} F(0) d\xi dt + C_9; \\ & \frac{1}{\tau_1} \sum_{k=q}^m \|V_k^{\tau_1} - V_{k-1}^{\tau_1}\|_{L_p^2(Q)}^2 \leq \\ & \tau_1 \int_0^T \frac{1}{2} a(V_{q-1}^{\tau_1}, V_{q-1}^{\tau_1}) + \tau_1 \int_{\partial\Omega} F(V_{q-1}^{\tau_1}) d\xi, dt + \tau_1 C_{10} \forall q, 1 \leq q < m; \forall m, 1 < m. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Preuve.

Nous définissons la fonction $V_N(\tau)$ linéaire sur chaque intervalle $(k\tau_1, (k+1)\tau_1)$ et passant par les points $(k\tau_1, V_k^{\tau_1})$ pour $0 \leq k \leq N$. Multiplions l'équation (1.44) par $\frac{V_{n+1}^{\tau_1} - V_n^{\tau_1}}{\tau_1}$ et intégrons sur Ω et de 0 à T . Nous avons : $\frac{V_{n+1}^{\tau_1} - V_n^{\tau_1}}{\tau_1} = \frac{d}{d\tau} V_N(\tau) \Big|_{(n\tau_1, (n+1)\tau_1)}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau_1} \|V_{n+1}^{\tau_1} - V_n^{\tau_1}\|_{L_p^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \int_0^T \frac{1}{2} a(V_{n+1}^{\tau_1}, V_{n+1}^{\tau_1}) + \tau_1 \int_{\partial\Omega} F(V_{n+1}^{\tau_1}) d\xi \\ & - \left(\frac{1}{2} a(V_n^{\tau_1}, V_n^{\tau_1}) + \tau_1 \int_{\partial\Omega} F(V_n^{\tau_1}) d\xi \right) dt = - \int_{n\tau_1}^{(n+1)\tau_1} \int_0^T \int_{\Omega} \partial_\tau V_N \partial_t V_N dx dt d\tau. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Multiplions l'équation (1.44) par $\partial_\tau V_N + \partial_t V_N$ et intégrons entre 0 et λ , $0 < \lambda \leq \Lambda$. Puisque V_N est une fonction périodique, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \|\partial_\tau V_N^{\tau_1} + \partial_t V_N^{\tau_1}\|_{L^2(0,\lambda;L^2(Q))}^2 + \\ & \int_0^T \left(\frac{1}{2} a(V_N^{\tau_1}(\lambda), V_N^{\tau_1}(\lambda)) + \int_{\partial\Omega} F(V_N^{\tau_1}(\lambda)) d\xi + \int_{\partial\Omega} F(0) d\xi \right) dt = 0. \end{aligned} \quad (1.47)$$

On en déduit qu'il existe $0 < C_9$ telle que : $\int_{(0,\lambda) \times Q} \partial_\tau V_N^{\tau_1} \partial_t V_N^{\tau_1} d\tau dt dx \leq C_9$. Nous sommions les égalités (1.46) de $n = p-1$ à $n = 0$, nous obtenons la première estimation. Nous sommions ensuite les égalités (1.46) de $n = q-1$ à $n = m$, et nous obtenons l'estimation annoncée en utilisant la positivité de F et $a(z, z)$.
□

Montrons maintenant que la suite $\{V_N(\tau)\}_{N \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Nous introduisons $M \in \mathbb{N}$, soit $\tau_2 = \frac{\Lambda}{M}$ et notons $V_M(\tau)$ la fonction linéaire sur chaque intervalle $(k\tau_2, (k+1)\tau_2)$ et passant par les points $(k\tau_2, V_k^{\tau_2})$ pour $0 \leq k \leq M$. Le lemme suivant nous donne un résultat de convergence des suites de fonctions $V_K(\tau)$ indicées par K .

Lemme 1.8 *Supposons les hypothèses H1, H2, et H3 satisfaites. Alors la suite de fonctions $V_K \subset C^0(0, \Lambda; L_p^2(0, T; H))$ converge uniformément vers $V \in C^0(0, \Lambda; L_p^2(0, T; H))$ pour tout $\Lambda \in \mathbb{R}^+$.*

Preuve.

Montrons que la suite V_K est de Cauchy. soit τ vérifiant $\frac{(n-1)\Lambda}{N} \leq \tau \leq \frac{n\Lambda}{N}$ et $\frac{(m-1)\Lambda}{M} \leq \tau \leq \frac{m\Lambda}{M}$. Puis estimons $V_N(\tau) - V_M(\tau)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \|V_N(\tau) - V_M(\tau)\|_{L_p^2(Q)}^2 & \leq \|V_{n-1}^{\tau_1} - V_{m-1}^{\tau_2}\|_{L_p^2(Q)}^2 + \|V_m^{\tau_2} - V_{m-1}^{\tau_2}\|_{L_p^2(Q)}^2 + \\ & \|V_m^{\tau_2} - V_n^{\tau_1}\|_{L_p^2(Q)}^2; \\ \|V_N(\tau) - V_M(\tau)\|_{L_p^2(Q)}^2 & \leq \|V_{n-1}^{\tau_1} - V_0\|_{L_p^2(Q)}^2 + \|V_{m-1}^{\tau_2} - V_0\|_{L_p^2(Q)}^2 + \\ & \|V_m^{\tau_2} - V_{m-1}^{\tau_2}\|_{L_p^2(Q)}^2 + \|V_m^{\tau_2} - V_0\|_{L_p^2(Q)}^2 + \|V_n^{\tau_1} - V_0\|_{L_p^2(Q)}^2. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Nous avons l'estimation suivante : $\|V_{n-1}^{\tau_1} - V_0\|_{L_p^2(Q)}^2 \leq \sum_{k=1}^{n-1} \|V_k^{\tau_1} - V_{k-1}^{\tau_1}\|_{L_p^2(Q)}^2$
et
 $\|V_{m-1}^{\tau_2} - V_0\|_{L_p^2(Q)}^2 \leq \sum_{k=1}^{m-1} \|V_k^{\tau_1} - V_{k-1}^{\tau_1}\|_{L_p^2(Q)}^2$. En utilisant le lemme 1.7 on en
déduit que pour tout
 $0 \leq \tau \leq \Lambda$ l'estimation suivante est vraie :

$$\|V_N(\tau) - V_M(\tau)\|_{L_p^2(Q)}^2 \leq \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{M}\right) C_5.$$

□

Theorème 1.7 *Supposons les hypothèses H1, H2, et H3 satisfaites. Alors il existe une unique fonction $V \in C^0(0, \infty; L_p^2(0, T; V)) \cap L^\infty(0, \infty; L_p^2(0, T; V \cap (H^2(\Omega))^2)) \cap H_{loc}^1(0, \infty; L_p^2(0, T; H))$ solution du problème (1.43).*

Preuve. Pour obtenir les résultats de régularité, nous procédons comme au Lemme 1.4. Notons que la fonction V_N admet une dérivée par rapport à τ dans chaque intervalle $(n\tau_1, (n+1)\tau_1)$. Afin de simplifier les notations, nous noterons $\frac{d}{d\tau} V_N$ la dérivée par morceaux, ce qui nous permet de réécrire le problème (1.44) sous la même forme que le problème (??). Multiplions l'équation (1.44) par $\frac{d}{d\tau} V_N + \partial_t V_N$. Nous avons :

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{d}{d\tau} V_N^{\tau_1} + \partial_t V_N^{\tau_1} \right\|_{L^2(0, \Lambda; L^2(Q))}^2 + \\ & \int_0^T \frac{1}{2} a(V_N^{\tau_1}(\Lambda), V_N^{\tau_1}(\Lambda)) + \int_{\partial\Omega} F(V_N^{\tau_1}(\Lambda)) d\xi + \int_{\partial\Omega} F(0) d\xi \Big) dt = 0. \end{aligned} \quad (1.49)$$

On en déduit les majorations uniformes par rapport à Λ :

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{d}{d\tau} V_N^{\tau_1} + \partial_t V_N^{\tau_1} \right\|_{L^2(0, \Lambda; L^2(Q))}^2 \leq C_{11}; \quad \int_{(0, \Lambda) \times Q} \frac{d}{d\tau} V_N^{\tau_1} \partial_t V_N^{\tau_1} d\tau dt dx \leq C_{11}; \\ & \left\| \frac{d}{d\tau} V_N^{\tau_1} \right\|_{L^2(0, \Lambda; L^2(Q))}^2 \leq C_{11}; \quad \left\| \partial_t V_N^{\tau_1} \right\|_{L^2(0, \Lambda; L^2(Q))}^2 \leq C_{11}; \quad \|V_N^{\tau_1}\|_{L^\infty(0, \Lambda; L^2(0, T; V))}^2 \leq C_{11}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Ces estimations a priori permettent d'extraire des sous suites convergentes pour la topologie faible ou pour la topologie faible étoile comme nous l'avons fait au lemme 1.4.

L'unicité est une conséquence du lemme de Gronwall. Prenons la différence de deux solutions, et nous établissons une inégalité semblable à (1.16), pour la différence des deux solutions puisque la périodicité implique une contribution nulle pour le terme ∂_t lorsque nous intégrons par rapport au temps. □

1.4.2 Convergence asymptotique par rapport à τ

Considérons maintenant le problème de perturbation singulière (1.43) qui s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} v(\tau) + \alpha(\tau) \partial_t v(\tau) - \alpha(\tau) A v(\tau) & = 0; \text{ dans } (0, T) \times \Omega \\ \alpha(\tau) (\mu \partial_n v(\tau) + (\lambda + 2\mu) \operatorname{div} (v(\tau)) n) & = f(t, I + v(\tau)); \text{ dans } (0, T) \times \partial\Omega; \\ v(\tau, 0, x) & = v(\tau, T, x) \text{ dans } (0, \infty) \times \Omega; \\ v(0, t, x) & = 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega. \end{cases} \quad (1.51)$$

Le comportement asymptotique par rapport au paramètre τ est donné par :

Theorème 1.8 *Supposons les hypothèses H1, H2 et H3 satisfaites. Alors la solution $v(t)$ du problème (1.51) converge lorsque τ tend vers l'infini vers $\bar{v} \in L_p^2(0, T; (L^2(\Omega))^2)$. De plus, nous avons :*

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} f(I + v(\tau)) = 0 \text{ dans } L_p^2\left(0, T; \left(H^{-1/2}(\partial\Omega)\right)^2\right).$$

Preuve. Multiplions l'équation (1.51) par $\frac{d}{d\tau}v(\tau) + \partial_t v(\tau)$, et nous intégrons, nous avons :

$$\begin{aligned} & \int_0^\Lambda \left\| \frac{d}{d\tau}v(\tau) \right\|_{L^2(Q)}^2 d\tau + 2 \int_0^\Lambda \int_Q \alpha(\tau) \partial_t v(\tau) \frac{d}{d\tau}v(\tau) dx dt d\tau + \int_0^\Lambda \left\| \alpha(\tau) \partial_t v(\tau) \right\|_{L^2(Q)}^2 d\tau - \\ & \int_0^\Lambda \int_0^T \frac{\alpha'(s)}{2} a(v(\tau), v(\tau)) d\tau d\tau + \int_0^\Lambda \int_0^T \frac{\alpha(\tau)}{2} a(v(\tau), v(\tau)) dt = \\ & - \int_0^\Lambda \int_0^T \int_{\partial\Omega} F(v(\tau)) d\xi dt d\tau + \int_0^\Lambda \int_0^T \int_{\partial\Omega} F(0) d\xi dt d\tau. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Nous avons les estimations suivantes :

$$\begin{cases} \left\| \frac{d}{d\tau}v \right\|_{L^2(0, \Lambda; (L_p^2(0, T; L^2(\Omega)))^2)} & \leq C_{12}; \\ \left\| \sqrt{\alpha(t)} \partial_t v \right\|_{L^2(0, \Lambda; (L_p^2(0, T; L^2(\Omega)))^2)} & \leq C_{13} \\ \left\| \sqrt{\alpha(t)} v(\tau) \right\|_{L^\infty(0, \Lambda; (L_p^2(0, T; H^1(\Omega)))^2)} & \leq C_{14}. \end{cases}$$

Montrons que $\frac{d}{d\tau}v$ est bornée par $\sqrt{\alpha(\tau)}$.

Pour tout $0 < \tau$ et quelle que soit la fonction $\varphi \in (L_p^2(0, T; H_0^1(\Omega)))^2$ périodique, on a

$$\alpha(\tau) \int_0^T \int_\Omega \partial_t v(\tau) \varphi dx dt = \alpha(\tau) \int_0^T \frac{d}{dt} \int_\Omega v(\tau) \varphi dx dt = 0;$$

Donc l'estimation suivante est vraie :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_\Omega \frac{d}{d\tau}v(\tau) \varphi dx dt \right| & \leq \sqrt{\alpha(\tau)} \int_0^T a(\sqrt{\alpha(\tau)} v(\tau), \varphi) dt \\ & \leq C_{14} \sqrt{\alpha(\tau)} \|\varphi\|_{L_p^2(0, T; H_0^1(\Omega))}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Nous en déduisons que $\frac{d}{d\tau}v(\tau)$ tend vers 0 quand τ tend vers l'infini, presque partout. Par les résultats de régularité de la fonction $\frac{d}{d\tau}v(\cdot)$, donnée dans le théorème 1.7, en utilisant l'injection dense de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ nous obtenons la convergence vers zéro de $\frac{d}{d\tau}v(\tau)$ dans $\left((L_p^2(0, T; L^2(\Omega)))^2\right)'$.

Par ailleurs, en considérant une formulation variationnelle, nous avons pour tous $\varphi \in (L_p^2(0, T; H^1(\Omega)))^2$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{\partial\Omega} f(I + v(\tau)) \varphi d\xi dt \right| & \leq \left| \int_0^T \int_\Omega \frac{d}{d\tau}v(\tau) \varphi dx dt \right| + \\ & \sqrt{\alpha(\tau)} \int_0^T a(\sqrt{\alpha(\tau)} v(\tau), \varphi) dt. \end{aligned} \quad (1.54)$$

On en déduit que le côté droit de l'inégalité précédente tend vers 0 quand τ tend vers l'infini. Puisque $v \in C^0(0, \infty; L_p^2(0, T; H))$, et puisque f est continue, nous concluons que

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} f(I + v(\tau)) = 0 \text{ dans } \left((L_p^2(0, T; H^{1/2}(\Omega)))^2\right)'.$$

La convergence de $v(\tau)$ vers $\bar{u} = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau u(s) ds$ est montrée de la même façon que dans le théorème 1.4. \square

En imagerie cardiaque, nous supposons que les données sont disponibles sous forme de N séquences d'images 2D ou 3D, représentant un échantillonnage équidistant en temps du mouvement du cœur au cours d'un cycle cardiaque que l'on suppose parfaitement périodique. Les données image représentent un certain nombre N d'espace uniformément échantillonnés bruités aux temps t^n d'un phénomène périodique.

Notre objectif est de faire correspondre un modèle géométrique du cœur à une séquence d'images en mouvement, tout en respectant certaines contraintes imposées : Le mouvement doit être périodique et régulier. Notre approche consiste à concevoir un modèle inspiré de la physique du myocarde, tout en étant assez simple pour pouvoir estimer simplement ses paramètres à partir des images médicales. Afin de respecter les contraintes (régularité et périodicité), nous cherchons des solutions dans un sous espace de dimension finie \mathcal{F} généré par un ensemble d'harmoniques de Fourier. Ainsi, on peut supposer que les champs de force f^n dérivant des images à échantillonner est un élément de \mathcal{F} . Un et un seul élément F de \mathcal{F} satisfait : $F(\frac{n}{N}) = f^n, \forall n, 0 \leq n < N$. La transformée de Fourier discrète des f^n des échantillons est définie comme suit :

$$dft[l] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f^n e^{-\frac{2\pi i l n}{N}},$$

et si N est un nombre pair, nous avons

$$f^l = \begin{cases} dft[l], & \forall l, \quad 0 \leq l < \frac{N}{2} \\ dft[l + N], & \forall l, \quad -\frac{N}{2} < l < 0 \\ \frac{1}{2} dft[\frac{N}{2}], & \forall l, \quad l = \pm \frac{N}{2}. \end{cases}$$

Ensuite, définissons

$$f(t) = \sum_{l=-N/2}^{N/2} f^l e^{2\pi i l t}$$

ainsi nous avons une fonction continue en temps qui représente le champ de force issu de l'image. Les champs de force f mesurés dans les images sont censés conduire le modèle parfaitement vers les frontières de l'objet dans l'image. Cependant, dans la pratique, les images IRM sont bruitées et contiennent beaucoup de structures, et les bords de l'objet dans l'image sont définis par $f^{-1}(0)$. Puisque les champs de force ont une faible régularité, dans la base de Fourier, le filtrage des hautes fréquences peut être aussi facile que la suppression des harmoniques de haute fréquence. Il est à noter que la troncature dans l'espace de Fourier n'est évidemment pas la stratégie optimale pour la déformation du modèle. Prenons l'exemple suivant qui imite le problème de la segmentation d'une séquence d'images cardiaques spatio-temporelle à l'étude. Nous avons l'équation temporelle $\frac{dU}{dt} + AU = f(U, t)$ décrivant le mouvement du cœur à travers un cycle cardiaque. En utilisant le système pseudo-instationnaire par rapport à τ et en discrétisant l'équation on a : $U_{n+1}^{\tau+1} - U_{n+1}^\tau + \Delta\tau[U_{n+1}^{\tau+1} - U_n^{\tau+1} + \Delta t A U_{n+1}^{\tau+1}] = \Delta t \Delta\tau f(U_{n+1}^{\tau+1})$.

Le signal cible est donnée par $s = x^2 + \exp(-2x)\cos(\pi x)\sin(2\pi x)$ pour $0 \leq x \leq M/2$ et $s = x^2 + \exp(-2x)$ pour $M/2 \leq x \leq M$. Comme dans le cas des conditions réelles le signal est contaminé par un bruit. Nous avons choisi d'illustrer certaines propriétés avec un seul pas de temps, afin de faciliter l'interprétation des résultats. Dans ce cas la fonction α est introduite devant $\Delta\tau[U_{n+1}^{\tau+1} - U_n^{\tau+1} + \Delta t A U_{n+1}^{\tau+1}]$. Sur la figure

2 les lignes continues représentent le signal, et les lignes en pointillés représentent la courbe déformée.

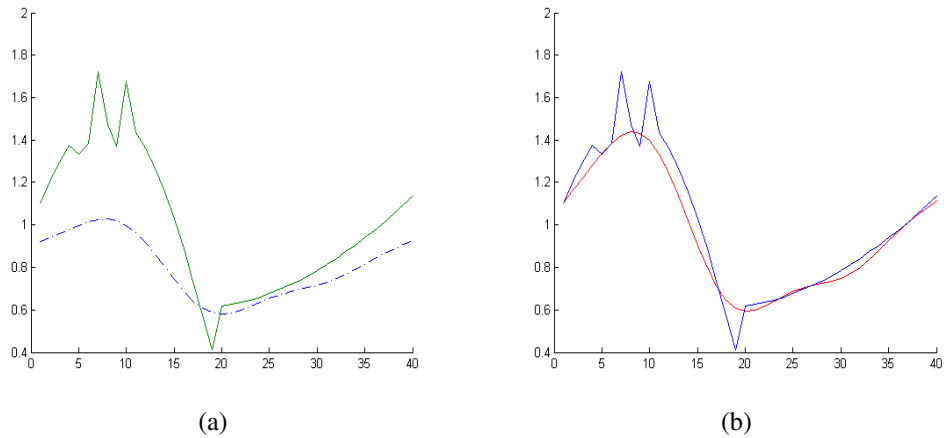


FIGURE 1.2 – (a) Résultats avec filtrage (4 harmoniques), (b) Résultat avec filtrage et perturbation singulière pour $\beta = .3$

1.4.3 Résolution numériques pour une séquence d'images cardiaques 2D

Nous donnons dans cette partie un exemple numérique pour une séquence d'image cardiaque 2D en utilisant la méthode des éléments finis. Le domaine Ω est approché par un polyèdre divisé en éléments triangulaires, le déplacement est approché par des fonctions linéaires sur ces éléments et les forces sont échantillonnées aux points du maillage. Pour M et N fixés, un pas de temps et un pas d'espace sont définis respectivement par : $\Delta t = \frac{T}{N}$; $\Delta \tau = \frac{1}{M}$. L'espace $H^1(\Omega)$ est approché par $V_h = \text{span}\{\phi_p\}_{p=1}^P$, un sous-espace des éléments finis, constitué d'éléments finis triangulaires de Lagrange d'ordre un (voir [24] par exemple). Le domaine Ω est un anneau décrit à la figure 1.3, et le champ de force f au moment $t_n = n\Delta t$ est obtenu comme il est expliqué dans les sections précédentes. Le vecteur de déplacement au niveau des points de maille est désigné par \mathbf{U} et le champ de force par \mathbf{F} . Pour chaque point $q\tau$, $0 < q \leq M$ nous devons calculer une suite $\{\mathbf{U}_n^{q\tau}\}_{n=0}^N$. Définissons la matrice de rigidité par $\mathbf{K}_{ij} = a(\phi_i, \phi_j)$ où $a(\cdot, \cdot)$ est définie à la section précédente. L'algorithme s'écrit : $\{\mathbf{U}_n^0 = 0\}_{n=0}^N$ et pour $\{\mathbf{U}_n^{\tau-1}\}_{n=0}^N$ avec $\mathbf{U}_0^{\tau-1} = \mathbf{U}_N^{\tau-1}$; donnée, calculer $\{\mathbf{U}_n^\tau\}_{n=0}^N$ solution de :

$$\frac{1}{\Delta \tau} \mathbf{U}_n^\tau + \frac{\alpha(\tau)}{\Delta t} (\mathbf{U}_n^\tau - \mathbf{U}_{n-1}^\tau) + \alpha(\tau) \mathbf{K} \mathbf{U}_n^\tau = \mathbf{F}(\mathbf{U}_n^{\tau-1}) + \frac{1}{\Delta \tau} \mathbf{U}_n^{\tau-1}; \quad (1.55)$$

$$1 \leq n \leq N-1; \mathbf{U}_0^\tau = \mathbf{U}_N^\tau$$

$$\left(\frac{1}{\Delta \tau} + \frac{\alpha(\tau)}{\Delta t} + \alpha(\tau) \mathbf{K} \right) \mathbf{U}_n^\tau = \mathbf{F}(\mathbf{U}_n^{\tau-1}) + \frac{1}{\Delta \tau} \mathbf{U}_n^{\tau-1} + \frac{\alpha(\tau)}{\Delta t} \mathbf{U}_{n-1}^\tau \quad (1.56)$$

$$1 \leq n \leq N-1; \mathbf{U}_0^\tau = \mathbf{U}_N^\tau$$

$\tau = \tau + 1$ tant que $\tau \leq 1$. Le problème (1.56) est un système linéaire et est donc simple à résoudre. Afin de tester le modèle sur des données réelles, nous avons utilisé une base de données cardiaque 4D². Des expériences ont été menées sur des séquences d'images 2D correspondantes à une coupe médiane du ventricule gauche. Un maillage de l'anneau a été utilisé comme la forme initiale du modèle et une coupe du ventricule gauche à la fin de systole sont présentés dans la Figure 1.3.

Dans les deux exemples ci-dessous, nous essayons d'identifier les contours de l'objet dans l'image de base, pour une période située au milieu du cycle cardiaque. Le modèle est soumis à un champ de force qui tire le bord de l'objet dans la direction des bords de l'image. Les résultats montrent le modèle DET après convergence superposé aux données d'image, pour une image représentant une coupe 2D du cœur d'un patient dans le plan orthogonal au grand axe du cœur. Les résultats sont donnés en utilisant la méthode de perturbation singulière ou non tout en filtrant une partie importante du bruit introduit par le procédé de segmentation de bas niveau.

2. 4D Heart Database : <http://www.laurentnajman.org/heart/index.html>

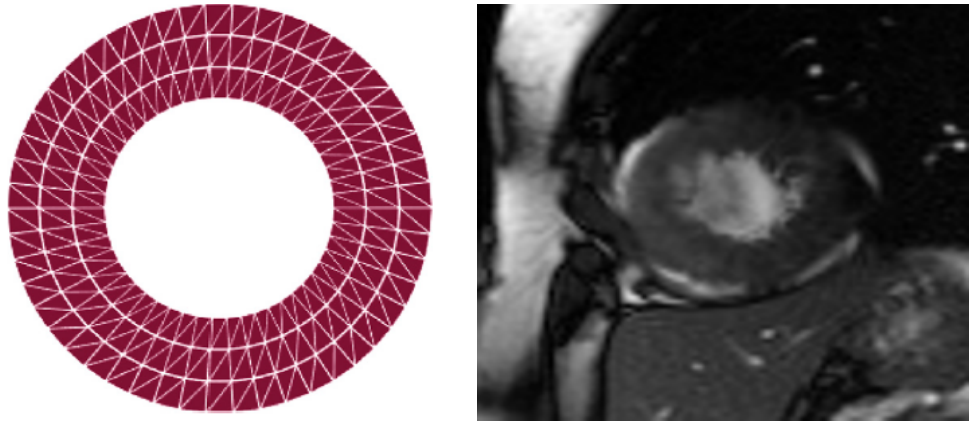


FIGURE 1.3 – Maillage de l'anneau . Image de base

La figure 1.4 montre le résultat en prenant la fonction $\alpha = \text{const.}$ Il n'y a pas une bonne adéquation entre l'image segmentée et les contours du modèle comme on peut le voir à 22h ; midi et quatre heures.

La figure 1.5 montre les résultats obtenus avec la fonction $\alpha = \exp(-0,6\tau)$, on voit que cela améliore la précision de la détection du bord de l'objet à détecter. Il est montré que l'utilisation de moins de cinq harmoniques est insuffisante pour capturer un mouvement cardiaque avec précision, tandis que l'utilisation de plus de cinq harmoniques détériore la précision de la segmentation comme on peut le voir dans la deuxième ligne de la figure 1.5, à une heure à l'extérieur de l'anneau.

La perturbation singulière agit de manière complémentaire avec le filtrage de Fourier : tout filtrage de Fourier assure la périodicité globale et la régularité, il ne filtre pas les oscillations locales irrégulières. La perturbation singulière permet de garantir la cohérence temporelle au niveau local.

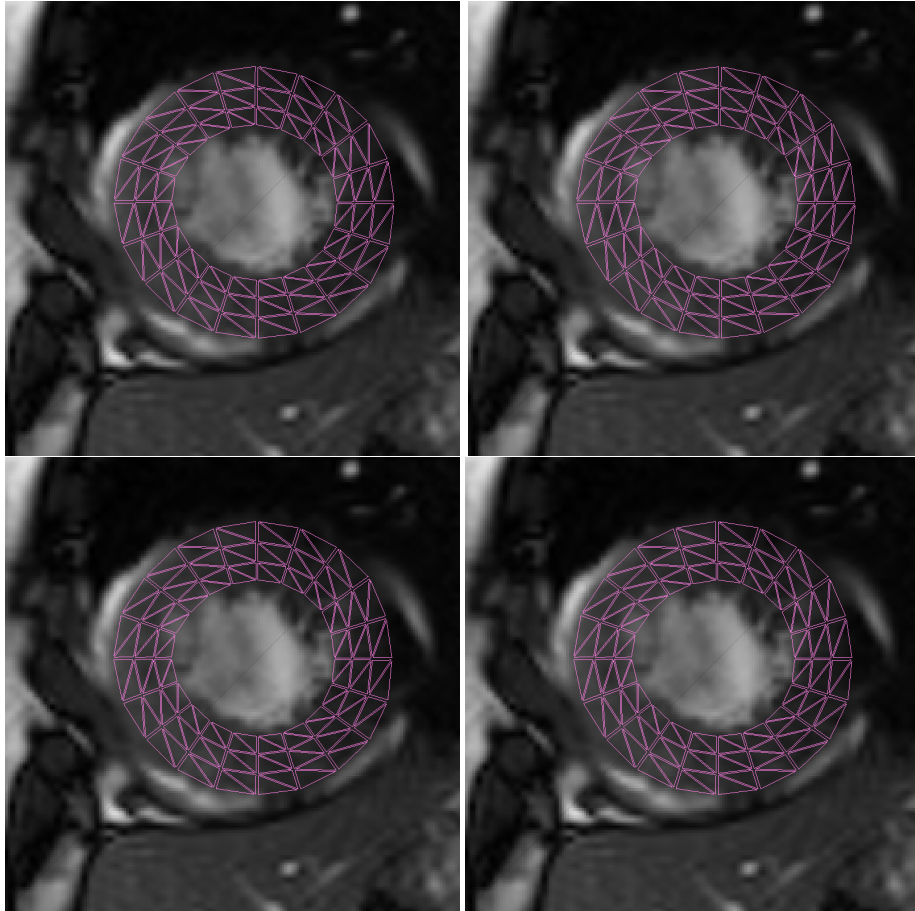


FIGURE 1.4 – Le modèle et l'image superposés, avec filtrage et perturbation singulière pour $\alpha = \text{const}$, les forces sont filtrées avec un nombre différent d'harmoniques. L'image en haut à gauche, 1harmonique. L'image en haut à droite, 5harmoniques. En bas à gauche, 10 harmoniques et la dernière image, 20 harmoniques.

Il est intéressant d'évaluer l'effet des différents paramètres du modèle présenté pour la segmentation et du suivi.

Les paramètres mécaniques, comme le module de Young, le coefficient de Poisson, le facteur d'amortissement α et le nombre d'harmoniques de Fourier sont utilisés pour décrire les points du mouvement de maillage au long du cycle cardiaque.

Le module de Young représente l'équilibre entre les connaissances antérieures et les données d'image. S'il est réglé trop haut, le modèle ne se déforme pas du tout. S'il est réglé trop bas, le modèle se déforme, pour correspondre à toutes les caractéristiques de l'image, les structures réelles et des artefacts semblables avec éventuellement des oscillations. Dans la pratique, pour l'analyse de séquences IRM normales du cœur, nous avons utilisé les valeurs du module de Young compris entre 0,2 et 0,6, avec les forces d'une norme maximale de 1.

Le coefficient de Poisson caractérise l'aptitude du matériau à compresser, c'est à dire, pour changer le volume en cas de stress. Il est généralement admis que le myo-

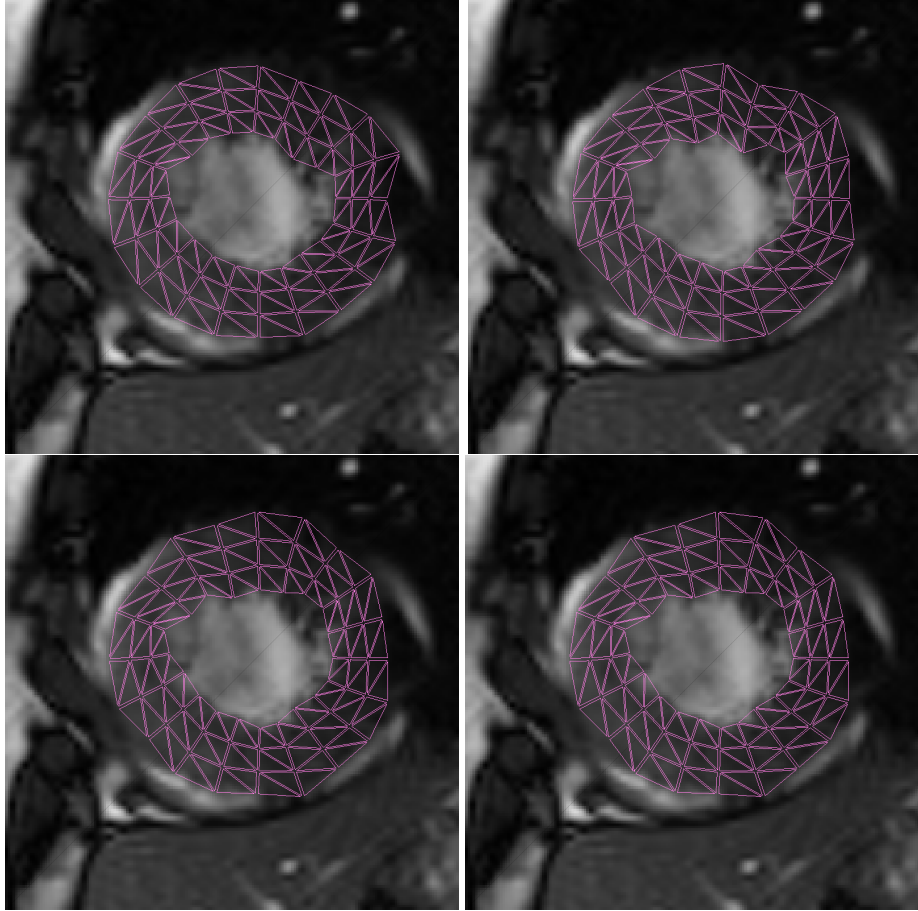


FIGURE 1.5 – Le modèle et l'image superposés , avec filtrage et perturbation singulière pour $\alpha(\tau) = \exp(-0.6\tau)$, les forces sont filtrées avec un nombre différent d'harmoniques. L'image en haut à gauche, 1harmonique. L'image en haut à droite, 5harmoniques. En bas à gauche, 10 harmoniques et la dernière image, 20 harmoniques.

carde est presque incompressible. Dans la pratique, une valeur intermédiaire comme 0,2 a été trouvée pour un bon fonctionnement.

1.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre un nouveau modèle d'élasticité dynamique pour l'estimation de segmentation et de mouvement dans les images IRM cardiaques et, plus généralement, pour l'analyse des images de structures souples en mouvement périodique. Des expériences sur une base de données MR montrent une très bonne capacité globale du modèle pour capturer le mouvement cardiaque dans des séquences d'images 2D. Notons que la méthode proposée peu être étendue pour les images 3D. Nous concluons que la méthode de perturbation singulière est nécessaire si on veut segmenter avec précision l'objet dans une image.

Chapitre 2

Equation de transport et principe du maximum discret

Sommaire

2.1	Introduction	39
2.2	Description du problème et cadre fonctionnel	40
2.3	Principe du maximum faible pour la formulation au sens des moindres carrés espace-temps	43
2.4	Approximation par éléments finis	45
2.4.1	Expression de la formulation variationnelle approchée	46
2.4.2	Une méthode de marche	46
2.4.3	Méthode de pénalisation	49
2.4.4	Méthode de Nitsche	50
2.5	Méthodes d'optimisation :	53
2.5.1	Projection sur le cône des fonctions positives	53
2.5.2	Problème avec un terme de régularisation	54
2.5.3	Méthode de multiplicateur de Lagrange	56
2.5.4	Méthode de limiteur de flux	58
2.5.5	Méthode de Kuzmin	61
2.5.6	Formulation au sens des moindres carrés avec pénalisation de la variation totale	66
2.5.7	Algorithmes pour le calcul de la solution	70
2.6	Résultats Numériques	75
2.7	Conclusion	78
2.8	Conclusion	91

2.1 Introduction

¹ Ce chapitre porte sur le principe du maximum discret dans un contexte d'éléments finis pour une formulation au sens des moindres carrés espace-temps pour l'équation du transport.

1. Le chapitre a donné lieu à un article à SINUM qui est en révision.

L'équation de transport (appelée équation du flot optique) est largement utilisée dans de nombreuses applications physiques et en imagerie [4]. La formulation au sens des moindres carrés espace-temps est bien adaptée dans un tel contexte car le problème est formulé comme un problème d'optimisation qui permet de prendre en compte une grande variété de contraintes. La méthode des moindres carrés est également largement utilisée pour résoudre des équations aux dérivées partielles, voir [40] et [44] pour l'élasticité et les problèmes de mécanique des fluides, et [14] pour des applications dans un contexte d'éléments finis. Le principe du maximum pour l'équation du transport est suffisant pour garantir la positivité, monotonie et une variation totale non croissante de la solution. Une caractéristique importante de la méthode des éléments finis pour simuler des phénomènes de transport est son incapacité de satisfaire le principe du maximum sur des maillages globaux pour la formulation de Galerkin standard. Cette carence se manifeste par des oscillations parasites (undershooting et overshooting), qui est bien connue depuis longtemps dans la littérature de la dynamique des fluides. Beaucoup de moyens sont disponibles pour les techniques des différences finies telles que : le limiteur de flux, la correction du flux, qui ont été récemment étendus à la méthode des éléments finis dans [49]. L'opérateur aux dérivées partielles en temps de l'équation du transport est séparé afin de tirer parti des propriétés de flot d'une équation différentielle, et l'opérateur aux dérivées partielles en espace est traité d'une manière spécifique. Cette formulation ne s'applique pas à la formulation considérée ici, formulation au sens des moindres carrés espace-temps. Pour récupérer un principe du maximum discret, nous proposons dans ce chapitre de transformer le problème en un problème d'optimisation sous contraintes, afin de gérer la variation totale de la solution. Ce chapitre est organisé comme suit : Dans la section 2.2 une description du problème est donnée et les espaces fonctionnels sont introduits. Dans la section 2.3 une formulation variationnelle du problème est donnée et un principe du maximum faible est prouvé. Dans la section 2.4, une formulation de Galerkin avec des éléments finis de Lagrange Q1 est introduite et quelques expériences numériques sont présentées pour une stratégie de marche en temps. D'autres formulations variationnelles sont aussi étudiées. Dans la section 2.5, nous proposons quelques méthodes d'optimisations qui permettent d'éliminer les oscillations. Enfin, quelques résultats numériques sont présentés.

2.2 Description du problème et cadre fonctionnel

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (avec $d = 1; 2; 3$) un domaine de frontière lipschitzienne $\partial\Omega$ satisfaisant la propriété du cône. Si $T > 0$ est donné, soit $Q = \Omega \times]0, T[$. Considérons une vitesse d'advection $v : Q \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ un terme source donnés. Dans tout ce chapitre, la vitesse v vérifie au moins la régularité suivante

$$v \in L^\infty(Q)^d \text{ et } \operatorname{div}(v) \in L^\infty(Q). \quad (2.1)$$

Soit

$$\Gamma_- = \{x \in \partial\Omega : (v(x, t) | n(x)) < 0\}$$

où $n(x)$ est la normale extérieure de $\partial\Omega$ au point x . On suppose que Γ_- ne dépend pas de t .

Le problème consiste à trouver une fonction $c : Q \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\partial_t c + (v(x, t) | \nabla c(x, t)) = f(t, x) \quad \text{dans } Q, \quad (2.2)$$

et les conditions initiale et aux limites

$$c(x, 0) = c_0(x) \quad \text{pour } x \text{ dans } \Omega \quad (2.3)$$

$$c(x, t) = c_1(x, t) \quad \text{pour } x \text{ sur } \Gamma_-. \quad (2.4)$$

Quand c_1 , c_0 , et v sont suffisamment régulières, en changeant le terme source f si nécessaire, on peut supposer que $c_1 = 0$ sur Γ_- , et $c_0 = 0$ sur Ω . Un résultat similaire sera donné plus tard, en utilisant un théorème de trace adapté. Dans ce qui suit, le cadre fonctionnel pour une formulation variationnelle du problème (2.2-2.4) est donné, (voir aussi [6, 7, 8]). En outre, un opérateur de trace est rappelé dans ce contexte. Pour $v \in L^\infty(Q)^d$, avec $\operatorname{div}(v) \in L^\infty(Q)$, on définit

$$\tilde{v} = (1, v_1, v_2, \dots, v_d)^t \in L^\infty(Q)^{d+1}$$

et pour une fonction suffisamment régulière φ définie sur Q , soit

$$\tilde{\nabla}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_d} \right)^t,$$

et \tilde{n} désigne le vecteur normal extérieur unitaire sur ∂Q . Finalement, le produit scalaire euclidien est noté $(\cdot | \cdot)$. Le théorème suivant est prouvé dans [21].

Théorème 2.1 *Sous les hypothèses $v \in L^\infty(Q)^d$, et $\operatorname{div}(v) \in L^\infty(Q)$, la trace normale de v , $(\tilde{v} | \tilde{n})$ est dans $L^\infty(\partial Q)$.*

Soit maintenant

$$\begin{aligned} \partial Q_- &= \{(x, t) \in \partial Q, (\tilde{v} | \tilde{n}) < 0\} \\ &= \Gamma_- \times (0, T) \cup \Omega \times \{0\}, \end{aligned}$$

et soit

$$c_b(x, t) = \begin{cases} c_0(x) & \text{si } (x, t) \in \Omega \times \{0\} \\ c_1(t, x) & \text{si } (x, t) \in \Gamma_- \times (0, T). \end{cases} \quad (2.5)$$

Ici, on suppose que $c_b \in L^2(\partial Q_-)$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{Q})$, considérons la norme

$$\|\varphi\|_{H(v, Q)} = \left(\|\varphi\|_{L^2(Q)}^2 + \left\| (\tilde{v} | \tilde{\nabla}\varphi) \right\|_{L^2(Q)}^2 + \int_{\partial Q_-} |(\tilde{v} | \tilde{n})| \varphi^2 d\tilde{\sigma} \right)^{1/2},$$

(voir aussi [6, 7, 8, 12]) et on définit l'espace $H(v, Q)$ comme la fermeture de $\mathcal{D}(\overline{Q})$ pour cette norme :

$$H(v, Q) = \overline{\mathcal{D}(\overline{Q})}^{H(v, Q)}$$

Si v est assez régulière, on peut voir que

$$H(v, Q) = \left\{ \rho \in L^2(Q), (\tilde{v} | \tilde{\nabla}\rho) \in L^2(Q), \rho|_{\partial Q_-} \in L^2(\partial Q_-), |(\tilde{v} | \tilde{n})| d\tilde{\sigma} \right\}$$

(voir p.e. [53, 41]). Rappelons un résultat de trace pour les fonctions appartenant à $H(v, Q)$ (voir [13]).

Proposition 2.1 *Sous l'hypothèse $v \in L^\infty(Q)^d$, et $\operatorname{div}(v) \in L^\infty(Q)$ il existe un opérateur de trace continu*

$$\begin{aligned}\gamma_{\tilde{n}} : H(v, Q) &\longrightarrow L^2(\partial Q, |(\tilde{v}|\tilde{n})|d\tilde{\sigma}) \\ \varphi &\mapsto \gamma_{\tilde{n}}\varphi = \varphi|_{\partial Q},\end{aligned}$$

qui peut être localisé comme suit :

$$\begin{aligned}\gamma_{\tilde{n}_\pm} : H(v, Q) &\longrightarrow L^2(\partial Q_\pm, |(\tilde{v}|\tilde{n})|d\tilde{\sigma}) \\ \varphi &\mapsto \gamma_{\tilde{n}_\pm}\varphi = \varphi|_{\partial Q_\pm}.\end{aligned}$$

Enfin, on définit l'espace

$$\begin{aligned}H_0 = H_0(v, Q, \partial Q_-) &= \{\rho \in H(v, Q), \rho = 0 \text{ sur } \partial Q_-\} \\ &= H(v, Q) \cap \operatorname{Ker} \gamma_{\tilde{n}_-}.\end{aligned}$$

Nous rappelons maintenant une extension de l'inégalité de Poincaré courbe obtenue dans [6, 7].

Theorème 2.2 *Si $v \in L^\infty(Q)^d$ et $\operatorname{div}(v) \in L^\infty(Q)$, la semi norme sur $H(v, Q)$ définie par*

$$|\rho|_{1,v} = \left(\int_Q (\tilde{v}|\tilde{\nabla}\rho)^2 dx dt + \int_{\partial Q_-} |(\tilde{v}|\tilde{n})|\rho^2 d\tilde{\sigma} \right)^{1/2} \quad (2.6)$$

est une norme, équivalente à la norme donnée sur $H(v, Q)$.

Alors l'espace $H(v, Q)$ est équipé de la norme $|\varphi|_{1,v}$.

Remarque. a) En utilisant le résultat ci-dessus, si $c_b = 0$, la semi norme

$$|\rho|_{1,v} = \left(\int_Q (\tilde{v}|\tilde{\nabla}\rho)^2 dx dt \right)^{1/2}$$

est une norme sur H_0 qui est équivalente à la norme usuelle sur $H(v, Q)$. \square

Nous concluons cette section avec une formulation au sens des moindres carrés dans $L^2(Q)$. La solution au sens des moindres carrés espace-temps de l'équation (2.2) correspond à un minimiseur dans $\{\varphi \in H(v, Q); \gamma_{\tilde{n}_-}(\varphi) - c_b = 0\}$ de la fonctionnelle strictement convexe, $H(v, Q)$ -coercive suivante

$$J(c) = \frac{1}{2} \left(\int_Q ((\tilde{v}|\tilde{\nabla}c) - f)^2 dx dt - \int_{\partial Q_-} c^2 (\tilde{v}|\tilde{n}) d\tilde{\sigma} \right).$$

La dérivée de Gâteaux de J est pour tout φ dans H_0

$$DJ(c)\varphi = \int_Q ((\tilde{v}|\tilde{\nabla}c) - f) (\tilde{v}|\tilde{\nabla}\varphi) dx dt - \int_{\partial Q_-} c\varphi (\tilde{v}|\tilde{n}) d\tilde{\sigma}.$$

Une condition nécessaire pour obtenir la solution au sens des moindres carrés de (2.2 - 2.4), est la formulation faible : Pour $c_b \in L^2(\partial Q_-)$, trouver $c \in H(v, Q)$ tel que

$$\begin{aligned} \int_Q (\tilde{v} | \tilde{\nabla} c) \cdot (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi) dx dt &= \int_Q f \cdot (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi) dx dt; \\ \gamma_{\tilde{n}_-}(c) &= c_b \end{aligned} \quad (2.7)$$

pour tout $\varphi \in H_0$ (voir [6, 7, 8, 12, 31, 33]).

2.3 Principe du maximum faible pour la formulation au sens des moindres carrés espace-temps

Cette section est consacrée à l'étude de l'équation (2.7). Plus précisément, un théorème d'existence et unicité de la solution de l'équation (2.7) est donné. Ensuite, un principe du maximum faible est déduit. Tout d'abord, nous donnons une formulation pénalisée au sens des moindres carrés espace-temps, utile pour une estimation L^∞ [13].

Lemme 2.1 Si $c_b \in L^2(\partial Q_-)$, soit c^m la solution de

$$\begin{aligned} \int_Q (\tilde{v} | \tilde{\nabla} c^m) (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi) dx dt - m \int_{\partial Q_-} (c^m - c_b) \cdot \varphi (\tilde{v} | \tilde{n}) d\tilde{\sigma} = \\ \int_Q f \cdot (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi) dx dt, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$\forall \varphi \in H(v, Q)$. Alors il existe une sous suite de c^m qui converge faiblement dans $H(v, Q)$ vers la solution c de (2.7) lorsque m tend vers l'infini.

Dans ce qui suit nous allons utiliser les versions suivantes du théorème de Stampacchia (voir [71, 47]).

Théorème 2.3 Soit $\rho \in H(v, Q)$, alors

$$(\tilde{v} | \tilde{\nabla} \rho) = 0 \text{ p.p. sur } \{(x, t) \in Q; \rho(x, t) = 0\} \quad (2.9)$$

Théorème 2.4 Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne continue.

a) Si $\rho \in H(v, Q)$, alors $g(\rho) \in H(v, Q)$.

b) Si g est dérivable sauf en un nombre fini de points, par exemple $\{z_1, \dots, z_n\}$, alors

$$(\tilde{v} | \tilde{\nabla} g(\rho)) = \begin{cases} g'(\rho) (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \rho) & \text{si } \rho(x, t) \notin \{z_1, \dots, z_n\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.10)$$

Maintenant, on réduit le problème (2.2)-(2.4) à un problème de Dirichlet homogène sur ∂Q_- . Pour $c_b \in L^2(\partial Q_-)$, soit $C_b \in H(v, Q)$ telle que $\gamma_{\tilde{n}_-}(C_b) = c_b$. Alors $\rho = c - C_b$ est la solution unique de

$$\int_Q (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \rho) \cdot (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \psi) dx dt = \int_Q (f - (\tilde{v} | \tilde{\nabla} C_b)) \cdot (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \psi) dx dt \quad (2.11)$$

pour tout $\psi \in H_0$. De plus la solution du problème (2.11) est équivalente à la solution de (2.2).

Theorème 2.5 Pour $v \in L^\infty(Q)^d$ fixée, avec $\operatorname{div}(v) \in L^\infty(Q)$, $c_b \in L^2(\partial Q_-)$, et $f \in L^2(Q)$, le problème (2.11) admet une solution unique. De plus

$$\|\rho\|_{1,v} = \left\| \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla} \rho \right) \right\|_{L^2(Q)} \leq \|f\|_{L^2(Q)} + \left\| \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla} C_b \right) \right\|_{L^2(Q)},$$

et la fonction $c = \rho + C_b$ est la solution spatio-temporelle au sens des moindres carrés pour (2.2).

Preuve. Cette affirmation est une conséquence de l'inégalité de Poincaré courbe (théorème 2.2) et du théorème de Lax-Milgram (voir aussi [6, 7]). \square

Remarque. Pour la solution numérique de l'équation (2.7), une stratégie de marche en temps peut être utilisé pour éviter la prise en compte de tout l'espace Q (voir p.e. [12, 31, 33]). \square

Corollaire 2.1 La solution c de l'équation (2.7) appartient à l'espace

$$X = L^2(Q) \cap L^2(\partial Q_+, (\tilde{v} | \tilde{n}) d\tilde{\sigma})$$

équipé de la norme $\|c\|$.

Le théorème suivant est un principe du maximum faible pour la solution du problème (2.7).

Theorème 2.6 Supposons que la fonction $f = 0$ dans l'équation (2.7) et que la fonction $c_b \in L^\infty(\partial Q_-)$. Alors la solution de l'équation (2.7) satisfait

$$\inf c_b \leq c \leq \sup c_b.$$

Preuve. Soit c^m la suite de solutions de la formulation pénalisée donnée dans le lemme 2.1. Alors

$$\begin{aligned} \int_Q \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla} c^m \right) \cdot \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi \right) dx dt - m \int_{\partial Q_-} c^m \cdot \varphi (\tilde{v} | \tilde{n}) d\tilde{\sigma} = \\ - m \int_{\partial Q_-} c_b \cdot \varphi (\tilde{u} | \tilde{n}) d\tilde{\sigma} \end{aligned}$$

pour tout $\varphi \in H(v, Q)$. Soit

$$M = \sup_{\partial Q_-} c_b$$

et posons

$$\varphi = (c^m - M)^+, Q_1 = \{(x, t) \in \bar{Q}, c^m - M > 0\}, \Sigma_1 = \partial Q_- \cap Q_1$$

$(c^m - M)^+ \in H(v, Q)$ et le théorème 2.4 fournit :

$$\begin{aligned} \int_{Q_1} \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla} c^m \right) \cdot \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla} (c^m - M) \right) dx dt - m \int_{\Sigma_1} c^m \cdot (c^m - M) (\tilde{v} | \tilde{n}) d\tilde{\sigma} = \\ - m \int_{\Sigma_1} c_b \cdot (c^m - M) (\tilde{v} | \tilde{n}) d\tilde{\sigma}. \end{aligned}$$

On a,

$$\begin{aligned} \int_{Q_1} \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla}(c^m - M) \right)^2 dx dt - m \int_{\Sigma_1} ((c^m - M))^2 (\tilde{v} | \tilde{n}) d\tilde{\sigma} = \\ - m \int_{\Sigma_1} (c_b - M) \cdot (c^m - M) (\tilde{v} | \tilde{n}) d\tilde{\sigma} \leq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'espace Q_1 est de mesure nulle, donc $c^m \leq M$. De la même façon on montre que $c^m \geq \inf c_b$. Nous avons les estimations suivantes :

$$\left\| \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla} c^m \right) \right\|_{L^2(Q_1)}^2 \leq \left\| \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla} c_b \right) \right\|_{L^2(Q_1)}^2$$

et

$$\int_{\Sigma_1} (c^m - c_b)^2 |(\tilde{v} | \tilde{n})| d\tilde{\sigma} \leq \frac{1}{m} \left(\left\| \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla} c_b \right) \right\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 \right)$$

Donc, la suite c^m admet une sous suite qui converge faiblement vers c . \square

2.4 Approximation par éléments finis

On discrétise le problème (2.2) avec une méthode de Galerkin. La méthode de Galerkin consiste à introduire un sous espace vectoriel de dimension finie de H_0 que nous noterons V_h . La construction du sous espace V_h se fait à l'aide d'un maillage du domaine Q par des éléments finis. Nous utilisons des éléments finis de Lagrange quadrilatères de type Q_1 . On choisit alors :

$$Q = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$$

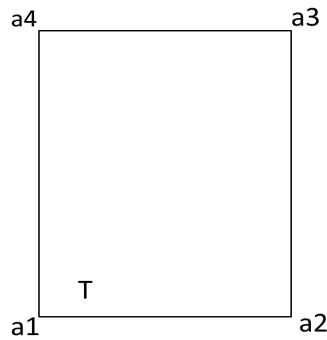


FIGURE 2.1 – Élément fini de type Q_1 .

$$V_h = \{ \varphi \in C^0(\overline{Q}), \varphi|_T \in Q^1(T) \}$$

où $Q^1(T)$ désigne l'espace des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 1. Pour pouvoir changer le pas de temps sans devoir remailler le domaine, nous posons :

$$z = \beta t \tag{2.12}$$

et résolvant le problème dans le plan (x, z) avec $\Delta z = \Delta x$. Nous devons respecter la condition $C_r \leq 1$ où :

$$C_r = v \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{v}{\beta}$$

2.4.1 Expression de la formulation variationnelle approchée

Soit $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ une base de V_h . On définit la forme bilinéaire symétrique $a(\cdot, \cdot) : V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$, par

$$a(\psi_h, \varphi_h) = \int_Q \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla} \psi_h \right) \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_h \right) dx dt.$$

L'approximation du problème (2.11), où le second membre est représenté par f consiste à trouver $c_h \in V_h$ telle que

$$a(\varphi_h, c_h) = \int_Q f \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_h \right) dx dt; \quad (2.13)$$

pour tout $\varphi_h \in V_h$, où

$$c_h = \sum_{j=1}^N \varphi_j(t, x) \cdot c_j.$$

Avec ces notations, les équations deviennent

$$\sum_{j=1}^N c_j \int_Q \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_j \right) \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_i \right) dx dt = \int_Q f \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_i \right) dx dt; \quad (2.14)$$

pour tout $i = 1, \dots, N$. Soit

$$a_{ij} = \int_Q \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_j \right) \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_i \right) dx dt, 1 \leq i, j \leq N;$$

et

$$b_i = \int_Q f \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_i \right) dx dt; 1 \leq i \leq N;$$

Les coefficients, a_{ij} , b_i , sont calculés d'une façon standard.

Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$, $B = (b_i)_{1 \leq i \leq N}$ et $C = (c_i)_{1 \leq i \leq N}$, alors la solution du système linéaire

$$AC = B \quad (2.15)$$

est la solution du problème (2.21).

2.4.2 Une méthode de marche

En dimension 2 ou 3 d'espace, le système spatio-temporel est onéreux à résoudre, car le nombre d'inconnues est élevé. En particulier en dimension spatiale 3, il faut mailler un domaine spatio-temporel de dimension 4. Nous évitons ces difficultés en faisant une résolution tranche de temps par tranche de temps. Une telle stratégie est possible puisque $\tilde{v}_1 = 1$, alors les courbes intégrales associées à \tilde{v} sont croissantes en temps. A chaque pas de temps on résout un problème "local en temps", où l'état initial

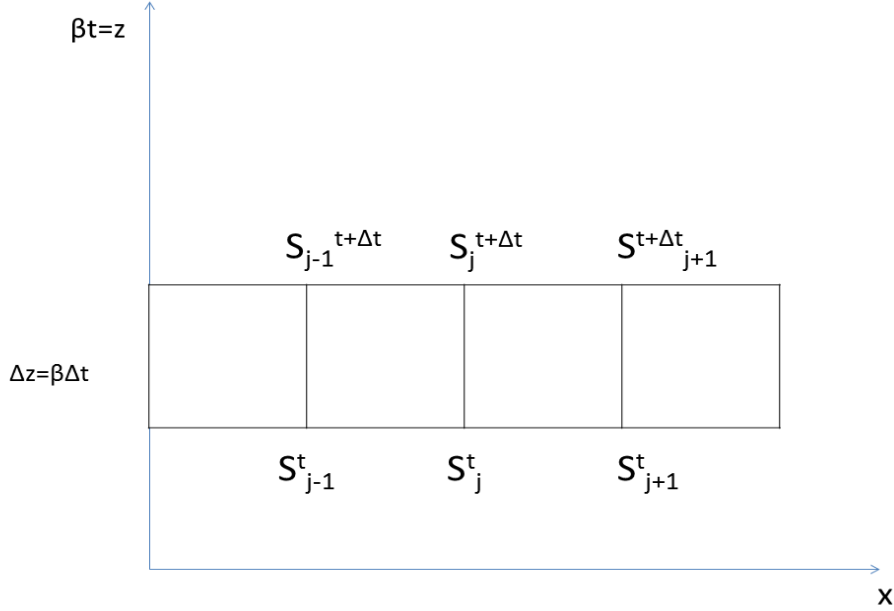


FIGURE 2.2 – Exemple de tranche en dimension 2 d'espace-temps.

est l'état au pas de temps courant et l'inconnu est l'état au pas de temps suivant. La matrice de rigidité du système est calculée pour une seule tranche d'éléments finis de largeur $\Delta z = \beta \Delta t$.

La solution c_h comprenant seulement les solutions calculées au temps t (prises comme condition initiale ou condition sur le bord) et les inconnues au temps $t + \Delta t$. Ces dernières sont réinjectées dans le système comme condition initiale pour l'étape suivante. Ainsi de suite on procède jusqu'à ce que l'on atteigne le temps final. Supposons le domaine $Q = \Omega \times \Delta t$, et soit $V_h \subset H$ un sous espace d'éléments finis de Lagrange Q_1 , le vecteur C est décomposé comme suit : C_- contient seulement les valeurs aux nœuds à l'instant t et les inconnus \tilde{C} à l'instant $t + \Delta t$. Nous avons :

$$AC = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_- \\ \tilde{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_- \\ \tilde{B} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

La solution \tilde{C} à l'instant $t + \Delta t$ est obtenue en résolvant le système réduit suivant :

$$Q\tilde{C} = \tilde{B} - PC_- . \quad (2.17)$$

Exemple numérique 2D espace-temps Dans cette section, nous traitons un exemple 2D espace-temps, nous allons tout d'abord déterminer la matrice de rigidité élémentaire dans le paragraphe suivant. La résolution se fait alors dans le plan (x, ξ) avec $\xi = \beta t$, $\Delta x = \Delta \xi = h = \beta \Delta t$. Soit $c_h = \sum_{j=1}^N \varphi_j(t, x) \cdot c_j$, avec $c_j = c_h(a_j)$ alors

$$a(c_h, \varphi_i) = \sum_{j=1}^N a(\varphi_j, \varphi_i) c_j = \sum_T \sum_{j=1}^N \int_T \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_j \right) \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_i \right) c_j dx dt,$$

Comme fonctions de base de l'élément, nous avons :

$$\varphi_1(t, x) = \frac{\tau - t}{\tau} \frac{x_{i+1} - x}{h}$$

$$\varphi_2(t, x) = \frac{\tau - t}{\tau} \frac{x - x_i}{h}$$

$$\varphi_3(t, x) = \frac{t}{\tau} \frac{x - x_i}{h}$$

$$\varphi_4(t, x) = \frac{t}{\tau} \frac{x_{i+1} - x}{h}$$

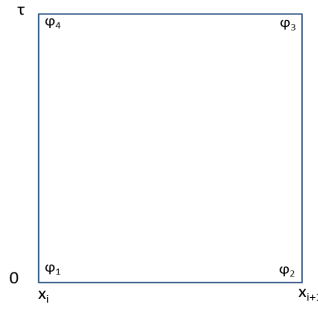


FIGURE 2.3 – Exemple d'élément avec les fonctions de bases

Mais, on a

$$\tilde{\nabla} \varphi_j = \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}, \beta \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} \right)$$

Donc

$$\left(\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_j \right) = v \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \beta \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi}$$

Alors, la matrice de rigidité par élément est :

$$A^e = \begin{pmatrix} \frac{v^2}{3} + \frac{\beta v}{2} + \frac{\beta^2}{3} & \frac{-v^2}{3} + \frac{\beta^2}{6} & \frac{-v^2}{6} - \frac{\beta v}{2} - \frac{\beta^2}{6} & \frac{v^2}{6} - \frac{\beta^2}{3} \\ * & \frac{v^2}{3} - \frac{\beta v}{2} + \frac{\beta^2}{3} & \frac{v^2}{6} - \frac{\beta^2}{3} & \frac{-v^2}{6} + \frac{\beta v}{2} - \frac{\beta^2}{6} \\ * & * & \frac{v^2}{3} + \frac{\beta v}{2} + \frac{\beta^2}{3} & \frac{-v^2}{3} + \frac{\beta^2}{6} \\ * & * & * & \frac{v^2}{3} - \frac{\beta v}{2} + \frac{\beta^2}{3} \end{pmatrix}$$

En divisant par β^2 et en introduisant le nombre de courant C_r , on obtient la forme suivante :

$$A^e = \begin{pmatrix} \frac{C_r^2}{3} + \frac{C_r}{2} + \frac{1}{3} & \frac{-C_r^2}{3} + \frac{1}{6} & \frac{-C_r^2}{6} - \frac{C_r}{2} - \frac{1}{6} & \frac{C_r^2}{6} - \frac{1}{3} \\ * & \frac{C_r^2}{3} - \frac{C_r}{2} + \frac{1}{3} & \frac{C_r^2}{6} - \frac{1}{3} & \frac{-C_r^2}{6} + \frac{C_r}{2} - \frac{1}{6} \\ * & * & \frac{C_r^2}{3} + \frac{C_r}{2} + \frac{1}{3} & \frac{-C_r^2}{3} + \frac{1}{6} \\ * & * & * & \frac{C_r^2}{3} - \frac{C_r}{2} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Après assemblage de k éléments les matrices $(k+1) \times (k+1)$ du système $Q\tilde{C} = \tilde{B} - PC_-$ donnent la j ème équation typique :

$$\begin{aligned} & (1 - 2C_r^2)\tilde{C}_{j-1} + 4(1 + C_r^2)\tilde{C}_j + (1 - 2C_r^2)\tilde{C}_{j+1} \\ & = (1 + 3C_r + C_r^2)C_{-j} - 1 + 2(2 - C_r^2)C_{-j} + (1 - 3C_r + C_r^2)C_{-j} + 1 \end{aligned}$$

Traitons maintenant l'exemple 2D espace-temps. Trouver c satisfaisant :

$$\partial_t c + (v(x, t) | \nabla c(x, t)) = 0 \quad \text{dans } (0, 1) \times (0, \tau) = Q, \quad (2.18)$$

avec les conditions initiale et aux limites

$$c(x, 0) = \frac{1}{2}(1 - \tanh(100x - 50)) \quad \text{pour } x \text{ dans } (0, 1) \quad (2.19)$$

$$c(0, t) = 0 \quad \text{pour } t \text{ sur } (0, \tau). \quad (2.20)$$

La résolution du problème se fait par formulation d'éléments finis énoncée dans la section 2.4.1. Le problème variationnel s'écrit : Trouver c_h solution du problème variationnel :

$$a(\varphi_h, c_h) = \int_Q f \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_h \right) dx dt; \quad (2.21)$$

avec $\tilde{v} = (1, 1)$ et $f = - \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla} \frac{\tau-t}{\tau} u_0 \right)$, où u_0 est une approximation de (2.19).

Afin d'évaluer les propriétés d'un schéma numérique, la solution calculée est tracée pour des moments différents. En utilisant la méthode de marche pour un seul pas de temps et pour 20 pas temps avec 80 points en espace, en respectant la condition $C_r \leq 1$ on peut obtenir le pas de temps maximal. Dans cet exemple le pas de temps est égal au pas d'espace. La figure 2.4 représente les résultats obtenus, l'axe horizontal est l'axe des x , et les valeurs de la solution calculée est rapportée sur l'axe vertical, où la figure (a) représente la solution pour un seul pas de temps et la figure (b) représente la solution pour 20 pas de temps.

La solution exacte du problème est la marche qui se déplace de gauche à droite sans se déformer. Dans la figure 2.4 la solution présente des oscillations au cours du temps. Malgré ces oscillations, la méthode converge comme il est montré à la figure 2.5

2.4.3 Méthode de pénalisation

Le principe du maximum discret est fortement lié à la propriété de M-matrice et au signe du membre de droite du système. Une formulation pénalisée est mis en œuvre dans cette section.

Considérons la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{aligned} \int_Q \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla} c \right) \cdot \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi \right) dx dt - m \int_{\partial Q_-} c \cdot \varphi \left(\tilde{v} | \tilde{n} \right) d\tilde{\sigma} = \\ - m \int_{\partial Q_-} c_b \cdot \varphi \left(\tilde{u} | \tilde{n} \right) d\tilde{\sigma} \end{aligned}$$

pour tout $\varphi \in H(v, Q)$.

La résolution du problème se fait par la méthode des éléments finis en utilisant la méthode de marche en temps. Prenons le même exemple que précédemment avec les mêmes valeurs pour le maillage, alors on obtient les résultats donnés par la figure 2.6 :

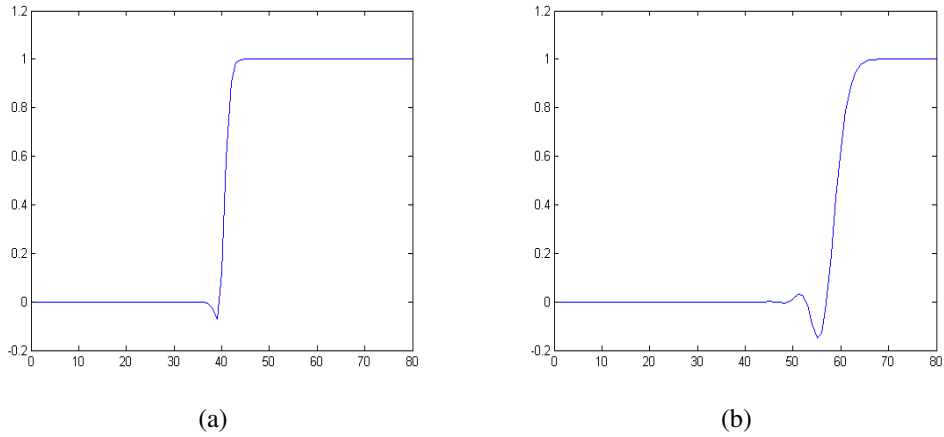


FIGURE 2.4 – (a) Solution pour un seul pas temps ; (b) Solution pour 20 pas temps.

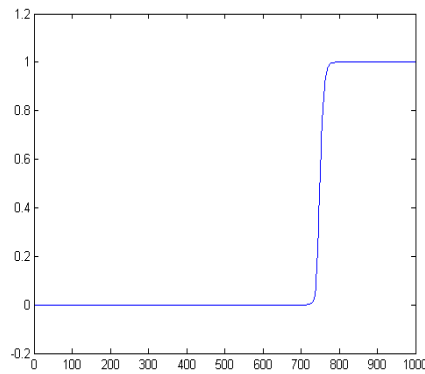


FIGURE 2.5 – convergence pour N=1000.

2.4.4 Méthode de Nitsche

En 1973, Reed et Hill ont introduit la première méthode de Galerkin discontinue (DG) pour les équations hyperboliques, et depuis ce temps il y a eu un développement actif des méthodes DG pour des problèmes hyperboliques, induisant un grand nombre de méthodes différentes. Aussi en 1970, mais indépendamment, de la méthode de Galerkin pour les équations elliptiques et paraboliques, des éléments finis discontinus ont été proposés, et un certain nombre de variantes ont été introduites et étudiées. Celles-ci sont généralement appelées méthodes de pénalité intérieure et leurs développements sont restés indépendants du développement des méthodes DG pour les équations hyperboliques, voir par exemple [35] où ils montrent que lorsqu'on résout le problème avec la méthode de Galerkin discontinue les oscillations persistent. Dans cette section, nous proposons une méthode de Nitsche pour prendre en compte les conditions aux limites sur le bord entrant.

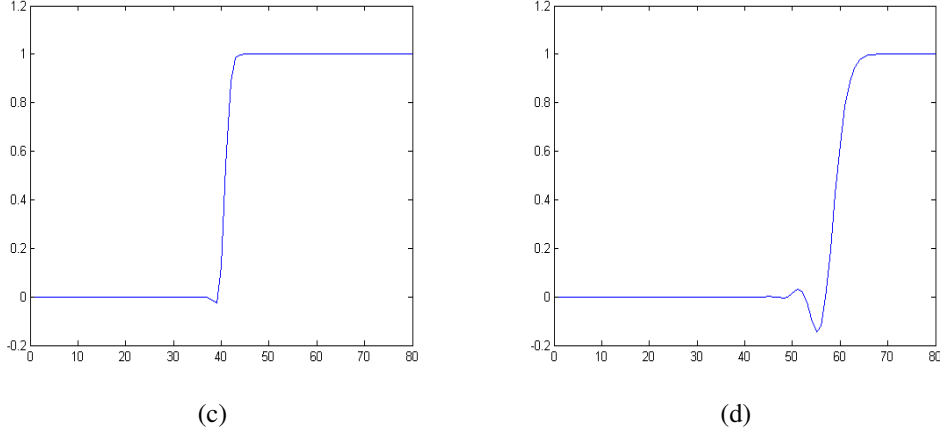


FIGURE 2.6 – (c) Solution pour un seul pas de temps ; (d) Solution pour 20 pas de temps

Soit la formulation :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}((\tilde{v} \otimes \tilde{v}) \tilde{\nabla} c) & = -\operatorname{div}(\tilde{v} f); \text{ dans } Q \\ c & = c_b; \text{ sur } \partial Q_-; \\ \left((\tilde{v} \otimes \tilde{v}) \tilde{\nabla} c | \tilde{n} \right) = f(\tilde{v} | \tilde{n}) & \text{ sur } \partial Q_+. \end{cases} \quad (2.22)$$

Notons $(\tilde{v} \otimes \tilde{v})$ le produit tensoriel dont les coefficients sont $\tilde{v}_i \tilde{v}_j$ tel que :

$$(a | b) (a | c) = ((a \otimes a) b | c)$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$\int_Q (\tilde{v} | \tilde{\nabla} c) (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi) dx dt - \int_{\partial Q} (\tilde{v} | \tilde{\nabla} c) \varphi (\tilde{v} | \tilde{n}) ds = \int_Q f(\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi) - \int_{\partial Q} (\tilde{v} | \tilde{n}) f \varphi ds \quad (2.23)$$

Pour toute fonction test φ suffisamment régulière. Si $f = 0$ alors

$$(\tilde{v} | \tilde{\nabla} c) (\tilde{v} | \tilde{n}) = 0 \text{ sur } \partial Q_+$$

La formulation variationnelle 2.23 devient :

$$\int_Q (\tilde{v} | \tilde{\nabla} c) (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi) dx dt - \int_{\partial Q_-} (\tilde{v} | \tilde{\nabla} c) \varphi (\tilde{v} | \tilde{n}) ds = 0 \quad (2.24)$$

pour tout $\varphi \in H(v, Q)$. La méthode de Nitsche consiste à déterminer l'approximation de la solution dans un sous espace d'éléments finis $V_h \subset H(v, Q)$ tel que : $\forall \varphi_i$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N c_j \int_Q (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_j) (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_i) dx dt + \frac{1}{\beta} \sum_{j=1}^N (c_j - c_{b_j}) \int_{\partial Q_-} \varphi_j \varphi_i ds \\ - \sum_{j=1}^N c_j \int_{\partial Q_-} (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_j) \varphi_i (\tilde{v} | \tilde{n}) ds = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

avec β quelconque. Notons que le deuxième terme est le terme de pénalisation. En utilisant la méthode de Nitsche, on résout le même exemple considéré plus haut en marchant en temps, on obtient les résultats représentés dans les figures ci-dessous pour un pas d'espace $h = 1/80$, un pas de temps $\tau = 1/100$ et $\beta = h/20$. Comme on peut

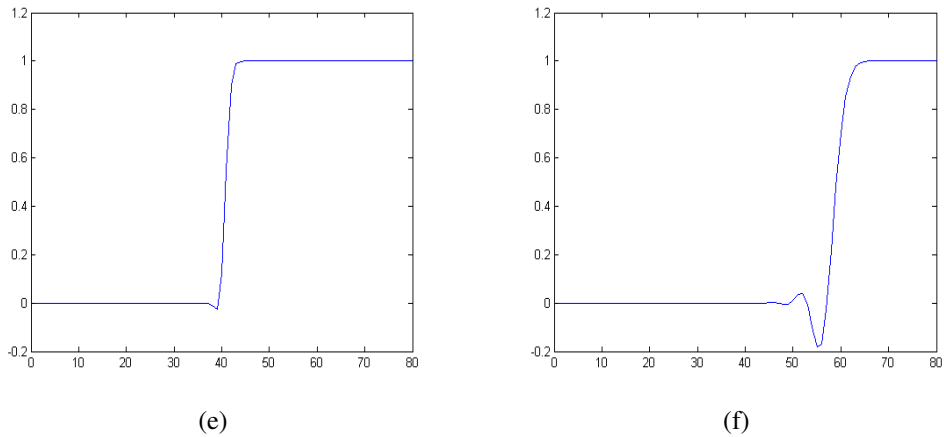


FIGURE 2.7 – (e) Solution du problème de Nitsche pour un seul pas de temps ; (f) Solution pour 20 pas de temps

le constater une méthode de Nitsche ne résout pas le problème des oscillations.

2.5 Méthodes d'optimisation :

Dans cette section, nous proposons quelques méthodes d'optimisation afin de gérer les oscillations.

La capacité de la méthode des moindres carrés avec des éléments finis de Lagrange pour approcher l'équation de transport est analysée dans un premier temps, en considérant une situation simplifiée, le cône des fonctions non négatives.

Imposer à la solution d'appartenir à un sous ensemble convexe n'est pas si évidente à mettre en œuvre, c'est pourquoi nous consacrons ce paragraphe à l'étude de quelques méthodes.

Remarquons que les fonctions de base $\varphi_k, 1 \leq k \leq N$ sont non négatives. Alors, on définit le sous ensemble convexe K_h par :

$$K_h = \left\{ \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k \mid \alpha_k \in \mathbb{R}^+ \right\} \quad (2.26)$$

Afin de récupérer un principe du maximum discret, on propose d'introduire une étape de projection sur le cône des fonctions non négatives K_h .

2.5.1 Projection sur le cône des fonctions positives

Supposons que f est régulière et que la matrice A est une M-matrice.

Soit c_{h_p} la projection de c_h sur K_h par rapport au produit scalaire induit par $a(\cdot, \cdot)$. On a pour tout $\psi \in K_h$:

$$a(c_h - c_{h_p}, \psi - c_{h_p}) \leq 0.$$

Soit $\varphi = \psi + c_{h_p}$, on a

$$a(c_h - c_{h_p}, \varphi) \leq 0 \quad \forall \varphi \in K_h$$

On définit c_{h_p} comme solution de

$$a(c_{h_p}, \varphi) = \int_Q g \varphi \, dx \, dt + \int_{\partial Q_+} h \varphi (\tilde{v} | \tilde{n}) \, ds. \quad (2.27)$$

En intégrant par parties le second terme de l'équation (2.21), on obtient

$$\int_Q f (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_h) \, dx \, dt = - \int_Q (\tilde{v} | \tilde{\nabla} f) \varphi \, dx \, dt + \int_{\partial Q_+} f \varphi (\tilde{v} | \tilde{n}) \, ds;$$

On a

$$a(c_h - c_{h_p}, \varphi) = \int_Q (- (\tilde{v} | \tilde{\nabla} f) - g) \varphi \, dx \, dt + \int_{\partial Q_+} (f - h) \varphi (\tilde{v} | \tilde{n}) \, ds.$$

z^\pm définit la partie positive ou négative de z . Alors

$$a(c_h - c_{h_p}, \varphi) = \int_Q (- (\tilde{v} | \tilde{\nabla} f)^+ + (\tilde{v} | \tilde{\nabla} f)^- - g) \varphi \, dx \, dt + \int_{\partial Q_+} (f^+ - f^- - h) \varphi (\tilde{v} | \tilde{n}) \, ds \leq 0;$$

pour tout $\varphi \in K_h$. Donc $g = (\tilde{v} | \tilde{\nabla} f)^-$; $h = f^+$. Pour que c_{h_p} soit dans K_h il est nécessaire que la matrice A soit une M-matrice, puisque le terme de droite est non négatif.

Exemple numérique 2D espace-temps Considérons le même exemple que précédemment. Alors dans ce cas la matrice A est une M-matrice. En utilisant la projection sur le cône K_h , le problème consiste à trouver c_h solution du problème variationnel suivant :

$$a(c_{h_p}, \varphi) = \int_Q (\tilde{v} | \tilde{\nabla} f)^- \varphi dx dt + \int_{\partial Q_+} f^+ \varphi (\tilde{v} | \tilde{n}) ds. \quad (2.28)$$

En utilisant la méthode de marche en temps, on obtient les résultats représentés dans la figure ci-dessous. On remarque que les oscillations (undershooting) sont réduites,

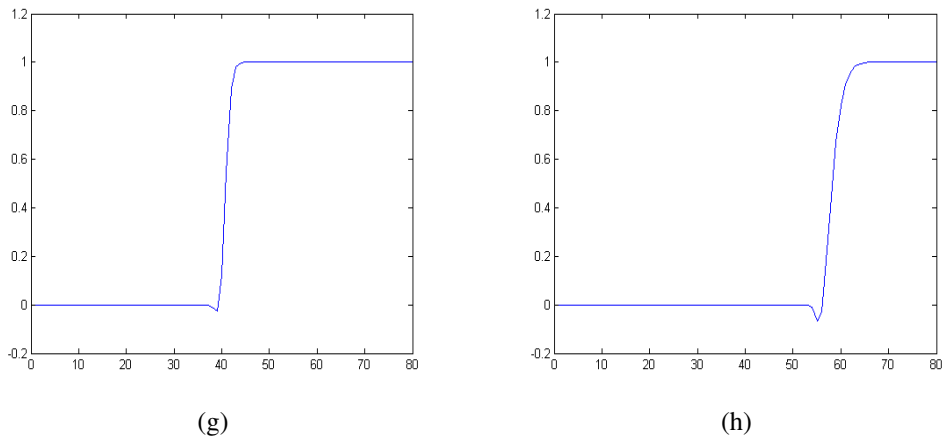


FIGURE 2.8 – (g) Solution du problème de projection pour un seul pas de temps ; (h) Solution pour 20 pas de temps

mais ne disparaissent pas. L'écart persistant est due à la mauvaise approximation par éléments finis de la partie positive ou négative.

2.5.2 Problème avec un terme de régularisation

Dans cette section, nous nous sommes intéressés à une autre stratégie qui consiste à rajouter une contrainte au problème :

$$\min_{\rho \in H_0} J(\rho) \quad (2.29)$$

Soit $K \subset H_0$ un cône convexe, on note I_K la fonction indicatrice de K . On ajoute une contrainte supplémentaire au problème 2.29, celui-ci devient : $\rho \in K$:

$$\min_{\rho \in K} J(\rho) = \min_{\rho \in H_0} J(\rho) + I_K(\rho) \quad (2.30)$$

Le problème approché par une méthode d'éléments finis de Lagrange Q1 s'écrit :

$$\rho_h = \text{Arg} \min_{\psi_h \in K_h} J(\psi_h)$$

La fonctionnelle J est strictement convexe et dérivable, K_h est un cône convexe fermé, donc le problème admet une unique solution. L'algorithme pour calculer ρ_h est donné par :

pour $c^0 \in \mathbb{R}^N$ et $\tau \in \mathbb{R}^+$ donnés, connaissant c^n

– calculer c^{n+1} solution de :

$$I(c^{n-})c^{n+1} + \tau A c^{n+1} = \tau B \quad (2.31)$$

où $I(c^{n-})$ est la matrice diagonale ayant à la ligne i le terme $\frac{1}{\tau}$ et A, B sont les matrices définies dans la section 2.4.1

– Si $\|c^{n+1} - c^n\|_{L^2(Q)} \leq \epsilon$ stop, sinon $n=n+1$ et on recalcule c^{n+1} .

Exemple numérique 2D espace-temps En prenant le même exemple que précédemment, et en utilisant l'algorithme ci-dessus, on obtient les résultats présentés dans la figure 2.9 :

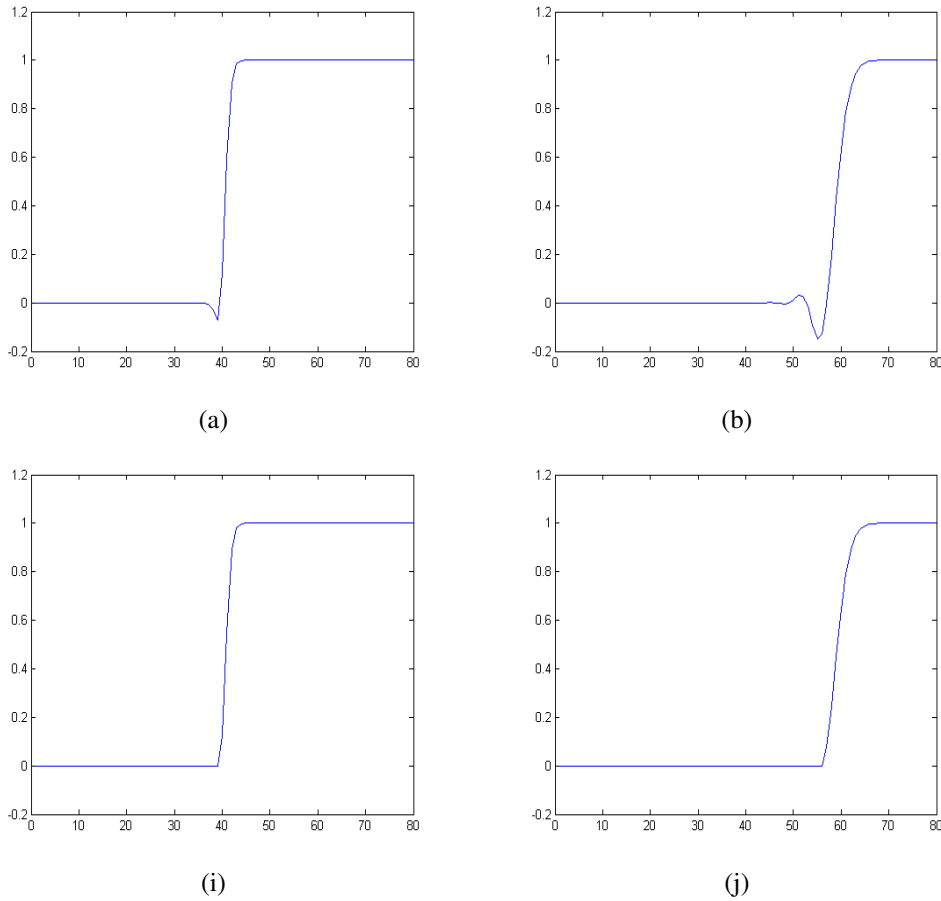


FIGURE 2.9 – (i) Solution du problème de pénalisation pour un seul pas de temps ; (j) Solution pour 20 pas de temps

Convergence de l'algorithme

Lemme 2.2 Pour tout $\tau > 0$ l'algorithme converge et nous avons :

$$\|c^-\|_3 \leq (2\tau)^{2/3} \|f\|_{L^2(Q)}^{2/3}$$

Preuve. Nous commençons par montrer que $\|c^{n+1}\|_{H(Q)} \leq C(B)$. Nous multiplions l'équation 2.31 à gauche par c^{n+1} et nous ne notons pas les transpositions pour ne pas alourdir les notations :

$$c^{n+1}(I(c^{n-})c^{n+1} + \tau A c^{n+1}) = \tau c^{n+1} B \quad (2.32)$$

Remarquant que nous pouvons majorer le second membre par : $\tau \beta \|f\|_{L^2(Q)} \sqrt{a(c^{n+1}, c^{n+1})}$, et $c^{n+1} I(c^{n-})c^{n+1}$ est non négatif, nous obtenons :

$$\|c^{n+1}\|_{H(Q)} = \sqrt{a(c^{n+1}, c^{n+1})} \leq \beta \|f\|_{L^2(Q)} \quad (2.33)$$

Cette majoration est indépendante de τ et de n . Donc on peut extraire une sous suite $(c^{n_p})_{(p \in \mathbb{N})}$ qui converge vers c . Réécrivons l'équation 2.31 comme :

$$w_h^t I(c_h^{n_p-}) c_h^{n_p+1} + \tau a(c_h^{n_p+1}, w_h) = \tau w_h^t B, \forall w_h \in K_h \quad (2.34)$$

Passant à la limite lorsque p tend vers l'infini, nous avons :

$$\tau a(c_h, w_h) = \tau w_h^t B - w_h^t I(c^-) c, \forall w_h \in K_h \quad (2.35)$$

Écrivons le second terme du second membre comme : $-\sum_{k=1}^N w_k c^- c_k = \sum_{k=1}^N w_k (c_k^-)^2$ ainsi, puisque les composantes de w sont non négatives, alors

$$a(c_h, w_h) \geq w_h^t B, \forall w_h \in K_h$$

Puisque cette inéquation n'a qu'une solution, c'est toute la suite qui converge vers c . Maintenant nous passons à la limite dans (2.35) pour $w_h \in V_h$. Il vient pour $w_h = c_h$:

$$\tau a(c_h, c_h) = \tau c_h^t B - c_h^t I(c^-) c_h$$

Nous en déduisons :

$$\tau (\|c_h^{n+1}\|_{H(Q)} + \beta \|c_h^{n+1}\|_{H(Q)} \|f\|_{L^2(Q)}) \geq \sum_{k=1}^N (c_k^-)$$

□

2.5.3 Méthode de multiplicateur de Lagrange

Dans cette section nous transformons le problème en un problème de minimisation sous contraintes afin d'avoir une solution positive.

Transformons le problème (2.15) en un problème de minimisation dans \mathbb{R}^N . Trouver C_p vérifiant :

$$\begin{cases} AC_p = B \\ C_p \geq 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

Formulons le problème précédent comme un problème de minimisation dans \mathbb{R}_+^N comme suit :

$$C_p = \underset{X \in \mathbb{R}_+^N}{\text{Agmin}} \quad \frac{1}{2} X^t A X - X^t B. \quad (2.37)$$

Le problème est bien posé, et en utilisant les conditions de complémentarité [66]

$$0 \leq (AC_p - F); C_p \perp (AC_p - F) \quad (2.38)$$

le problème (2.37) peut être résolu en utilisant la méthode de multiplicateur de Lagrange généralisée suivante. Pour tout réel $r > 0$,

$$\begin{cases} AC_p = B + \Lambda \\ \Lambda = (\Lambda - rC_p)^+ \end{cases} \quad (2.39)$$

où, la partie positive d'un vecteur représente la partie positive de ses composants. Un algorithme itératif est proposé pour résoudre le problème (2.39). Soit $C_p^0 = 0_{\mathbb{R}^N}$; $\Lambda^0 = 0_{\mathbb{R}^N}$, alors calculer :

$$\begin{cases} AC_p^{k+1} = B + \Lambda^{k+1} \\ \Lambda^{k+1} = (\Lambda^k - rC_p^k)^+ \end{cases}$$

Considérant l'exemple 2D espace-temps précédent, les résultats numériques obtenus sont présentés dans la figure 2.10.

Convergence de l'algorithme

Maintenant, la convergence de l'algorithme itératif est prouvée. Nous avons :

$$\begin{cases} A(C_p^{k+1} - C_p^k) = \Lambda^{k+1} - \Lambda^k \\ \Lambda^{k+1} - \Lambda^k = (\Lambda^k - rC_p^k)^+ - (\Lambda^{k-1} - rC_p^{k-1})^+ \end{cases} \quad (2.40)$$

Puisque z^+ est une fonction lipschitzienne, on déduit :

$$\|\Lambda^{k+1} - \Lambda^k\|^2 \leq \|\Lambda^k - \Lambda^{k-1}\|^2 - 2r (\Lambda^k - \Lambda^{k-1} | C_p^k - C_p^{k-1}) + r^2 \|C_p^k - C_p^{k-1}\|^2.$$

La matrice A définie positive, en utilisant la première équation de (2.40), l'inégalité précédente devient :

$$\begin{aligned} \|\Lambda^{k+1} - \Lambda^k\|^2 &\leq \|\Lambda^k - \Lambda^{k-1}\|^2 - 2r (A(C_p^k - C_p^{k-1}) | C_p^k - C_p^{k-1}) + r^2 \|C_p^k - C_p^{k-1}\|^2 \\ &\leq \|\Lambda^k - \Lambda^{k-1}\|^2 + r(r - 2\mu_1(A)) \|C_p^k - C_p^{k-1}\|^2. \end{aligned}$$

Si $\|C_p^k - C_p^{k-1}\|^2 = 0$, la suite $\{\Lambda^p\}_{p>k}$ devient stationnaire et donc converge, si $\|C_p^k - C_p^{k-1}\|^2 \neq 0$, en choisissant $0 < r < \mu_1(A)$ avec $\mu_1(A)$ est la plus petite valeur propre de la matrice définie positive A et on a l'existence de $\xi < 1$, tel que :

$$\begin{aligned} \|\Lambda^{k+1} - \Lambda^k\|^2 &< \|\Lambda^k - \Lambda^{k-1}\|^2 \\ \|\Lambda^{k+1} - \Lambda^k\|^2 &\leq \xi \|\Lambda^k - \Lambda^{k-1}\|^2. \end{aligned}$$

Pour tout $q < p$ on en déduit :

$$\|\Lambda^p - \Lambda^q\|^2 \leq \sum_{l=q+1}^{l=p} \|\Lambda^l - \Lambda^{l-1}\|^2 \leq \sum_{l=q+1}^{l=p} \xi^{l-1} \|\Lambda^1\|^2 \leq \xi^q \sum_{m=0}^{\infty} \xi^m \|\Lambda^1\|^2$$

ce qui prouve que $\{\Lambda^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

La suite $\{C_p^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy, et nous pouvons prendre la limite dans les équations.

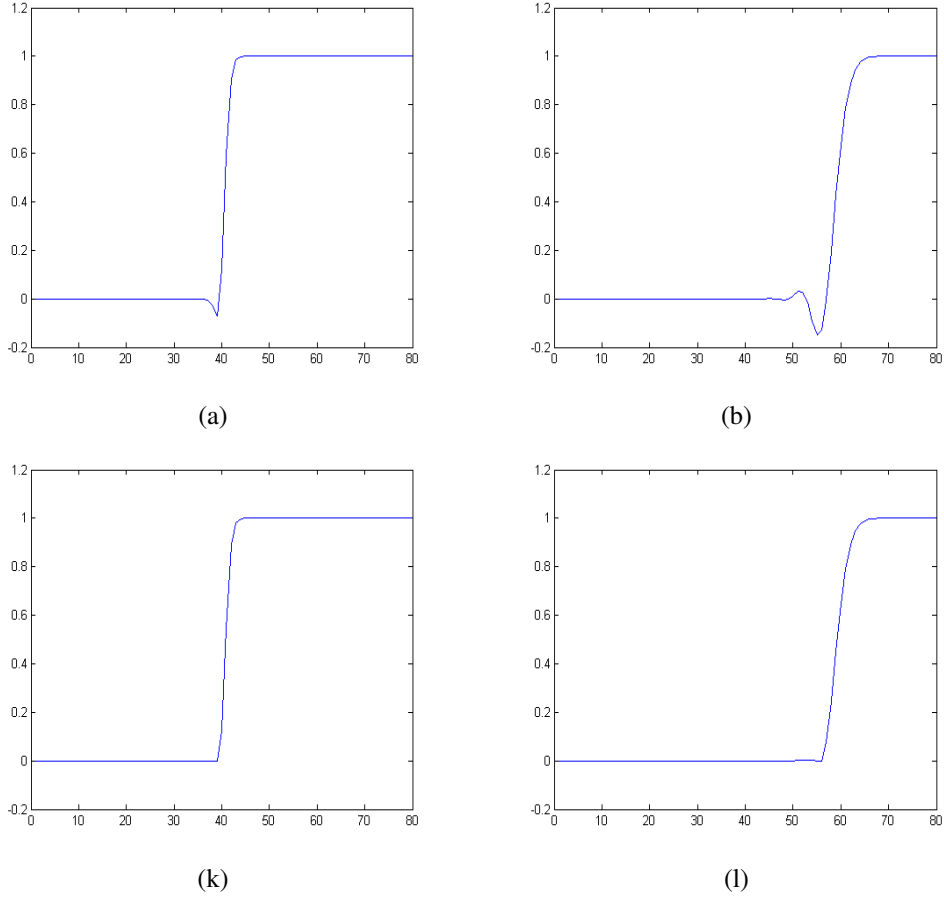


FIGURE 2.10 – (k) Solution de marcher en temps pour le multiplicateur de Lagrange généralisé pour un seul pas de temps (l) pour 20 pas de temps

Remarque 2.1 *La méthode de multiplicateur de Lagrange généralisée n'est pas une technique de projection, ainsi le maximum du problème avec contrainte pourrait augmenter lorsque la méthode des multiplicateurs de Lagrange généralisée est utilisée.*

Si la solution est une double marche se déplaçant de la gauche vers la droite sans se déformer, la méthode des multiplicateur de Lagrange généralisée n'est pas capable de traiter les oscillations parasites comme le montre l'exemple avec la condition initiale suivante.

Soit $c_0(x, t) = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2}\tanh(100x - 20)) + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2}\tanh(100x - 35))$. Dans la figure 2.11 la solution calculée par la méthode de multiplicateur de Lagrange généralisée est présentée au bout de 1 pas de temps et 20 pas de temps avec les mêmes valeurs de paramètres que précédemment.

2.5.4 Méthode de limiteur de flux

Dans cette partie, nous présentons une méthode de limiteur de flux [65] dans le but de supprimer les oscillations et préserver la positivité de la solution. Considérons

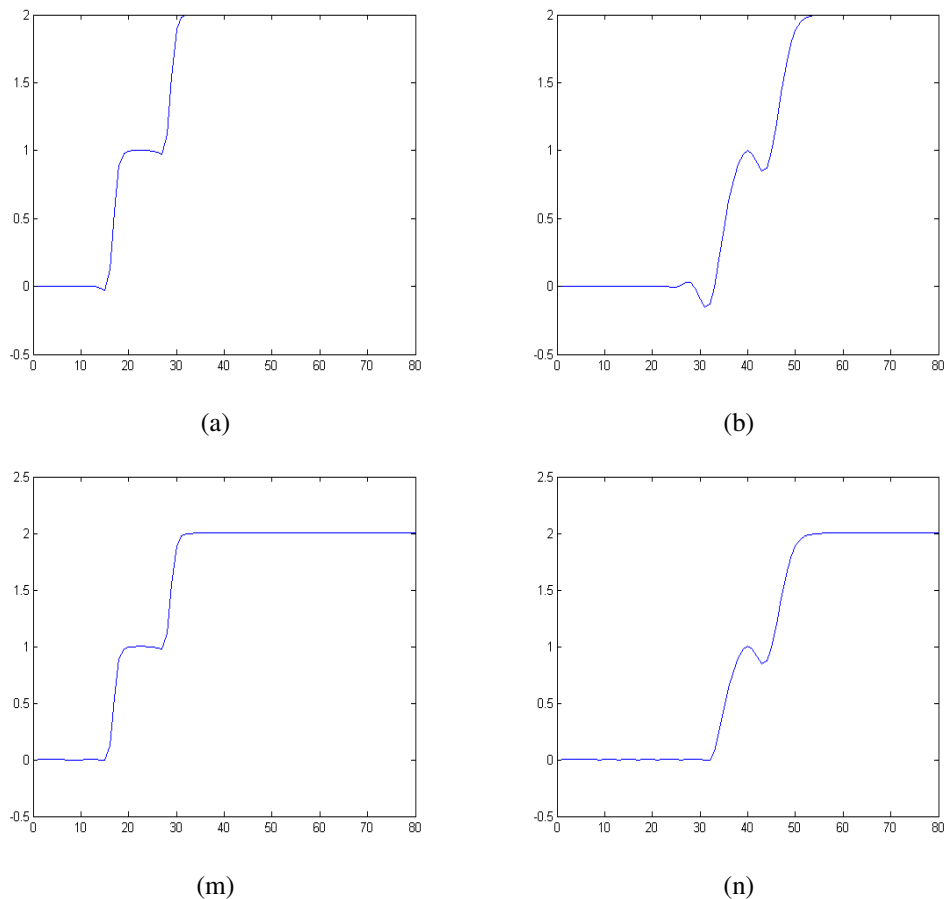


FIGURE 2.11 – (m) Solution pour le multiplicateur de Lagrange généralisé pour un seul pas de temps ; (n) pour 20 pas de temps

l'équation d'advection 1D :

$$\partial_t c + (v(x, t) | \nabla c(x, t)) = 0 \quad (2.41)$$

avec v constante. Une approximation numérique de la solution de (2.41), peut être obtenue en considérant une méthode de discrétisation par différences finies comme suit :

$$c_j^{\Delta t} = c_j - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2} - F_{j-1/2}) \quad (2.42)$$

avec $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ est le pas de temps et $\Delta x = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$ le pas d'espace, et F la fonction de limiteur de flux donnée par :

$$F_{j+1/2} = v \left\{ c_j + \frac{1}{2} (1 - \nu) [\alpha (c_j - c_{j-1}) + (1 - \alpha) (c_{j+1} - c_j)] \right\} \quad (2.43)$$

avec $\nu = v \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

La méthode de limiteur de flux peut être obtenue, en combinant la formule de flux

d'ordre inférieur $F_l(c_{j-1}, c_j)$ (comme le flux décentré) et toute formule de flux d'ordre supérieur $F_h(c_{j-1}, c_j)$ (comme le flux de Lax-Wendroff), pour obtenir une méthode de limiteur de flux avec par exemple

$$F_{j-1/2} = F_l(c_{j-1}, c_j) + \Psi_{j-1/2}[F_h(c_{j-1}, c_j) - F_l(c_{j-1}, c_j)]$$

Si $\Psi_{j-1/2} = 0$, cela se réduit à la méthode d'ordre faible, et si $\Psi_{j-1/2} = 1$, alors nous obtenons la méthode d'ordre supérieur. En particulier, un indice de la façon dont cela peut être fait est considéré par la réécriture du flux de Lax-Wendroff, obtenu par (2.43) avec $\alpha = 0$, comme

$$F_{j-1/2} = vc_{j-1} + \frac{1}{2}v(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}v)\Delta c_{j-1/2} \quad (2.44)$$

avec $\Delta c_{j-1/2} = c_j - c_{j-1}$. De cette façon, le flux prend la forme du flux décentré avec un terme de correction, et donc la méthode de Lax-Wendroff se formule comme suit :

$$c_j^{\Delta t} = c_j - v \frac{\Delta t}{\Delta x}(c_j - c_{j-1}) - \frac{1}{2}v \frac{\Delta t}{\Delta x}(\Delta x - v\Delta t)(\Delta c_{j+1/2} - \Delta c_{j-1/2}) \quad (2.45)$$

Introduisant maintenant $\delta_{j-1/2}$ la version limite de $\Delta c_{j-1/2}$, on peut réécrire l'équation (2.44) comme suit :

$$F_{j-1/2} = vc_{j-1/2} + \frac{1}{2}v(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}v)\delta_{j-1/2}$$

En choisissant :

$$\delta_{j-1/2} = \Psi(\theta_{j-1/2})\Delta c_{j-1/2}$$

on obtient une méthode de limiteur de flux donnée par :

$$c_j^{\Delta t} = c_j - v \frac{\Delta t}{\Delta x}(c_j - c_{j-1}) - \frac{v}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}v) [\Psi(\theta_{j+1/2})\Delta c_{j+1/2} - \Psi(\theta_{j-1/2})\Delta c_{j-1/2}] \quad (2.46)$$

où $\Psi(\theta)$ est la fonction de limiteur de flux, dont la valeur dépend de la régularité de la solution avec $\theta_{j-1/2} = \frac{\Delta c_{j-3/2}}{\Delta c_{j-1/2}}$ et $\Delta c_{j+1/2} = c_{j+1} - c_j$, $\Delta c_{j-1/2} = c_j - c_{j-1}$. Lorsque $\Psi(\theta) = 1$, on obtient la méthode de Lax-Wendroff, et pour $\Psi(\theta) = 0$ la méthode décentrée.

Plus généralement, nous pourrions concevoir une fonction de limiteur Ψ qui a des valeurs proches de 1 pour $\theta \sim 1$, mais qui réduit la pente lorsque les données ne sont pas régulières. Citons maintenant les fonctions $\Psi(\theta)$ pour certaines méthodes numériques.

– Méthodes numériques :

upwind : $\Psi(\theta) = 0$

Lax-wendroff : $\Psi(\theta) = 1$

Beam-Warming : $\Psi(\theta) = \theta$

Fromm : $\Psi(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \theta)$

– Limiteurs de résolution supérieure :

superbee : $\Psi(\theta) = \max(0, \min(1, 2\theta), \min(2, \theta))$

van Leer : $\Psi(\theta) = \frac{\theta + |\theta|}{1 + |\theta|}$

minmod : $\Psi(\theta) = \minmod(1, \theta)$

où la fonction $\minmod(.,.)$ est définie par :

$$\minmod(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } ab > 0 \text{ et } |a| < |b| \\ b & \text{si } ab > 0 \text{ et } |b| < |a| \\ 0 & \text{si } ab < 0. \end{cases} \quad (2.47)$$

Pour plus de détails sur la méthode de limiteur de flux voir [65]

Exemple numérique 2D espace-temps : Considérant l'exemple 2D espace-temps précédent que l'on résout par la méthode de Lax-Wondroff avec la fonction limiteur $\Psi(\theta) = \minmod(1, \theta)$ en marchant en temps, pour $\Delta x = 1/80$ et $\Delta t = 1/100$. Les résultats numériques obtenus sont présentés dans la figure 2.12.

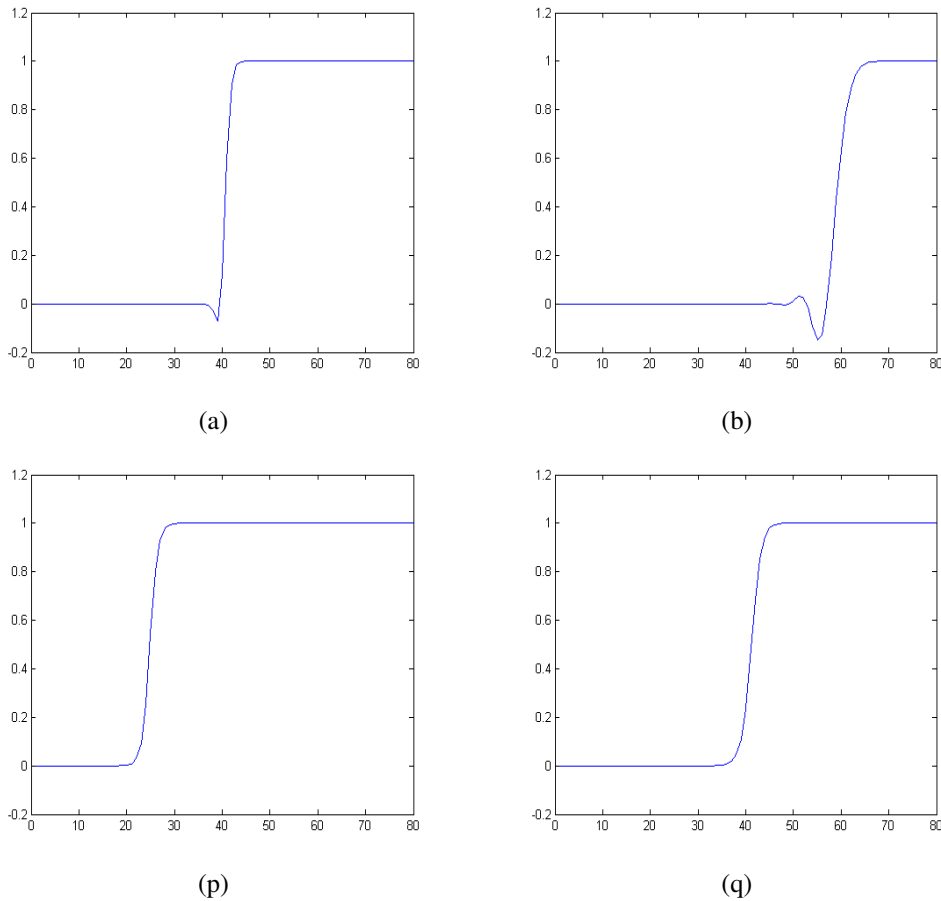


FIGURE 2.12 – (p) Solution avec limiteur de flux pour un seul pas de temps (q) pour 20 pas de temps

2.5.5 Méthode de Kuzmin

Afin d'imposer le principe du maximum discret (PMD), Kuzmin a proposé une modification de la méthode de Galerkin standard d'une équation du transport en ajou-

tant un flux diffusif et antidiffusif, et le résultat est un système algébrique non linéaire qui satisfait la contrainte du PMD. Cette nouvelle approche de correction de flux algébrique fournit un traitement des problèmes stationnaires et les problèmes dépendant du temps. Par ailleurs, Kuzmin utilise un algorithme pour limiter les flux convectifs et la partie antidiffusive de la matrice de masse cohérente.

Le problème considéré est donné par :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(vc - D\nabla c) = 0 \text{ dans } \Omega \quad (2.48)$$

qui décrit l'équation de transport d'une quantité conservée c dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{1, 2, 3\}$. La vitesse v et le tenseur de diffusion D sont supposés connus. Les conditions de Dirichlet et Neumann sont données par :

$$\begin{cases} c = g \text{ sur } \Gamma_D \\ n \cdot \nabla c = 0 \text{ sur } \Gamma_N \end{cases}$$

où n est le vecteur unitaire normal extérieur. Nous considérons le cas $D = 0$ alors on a $\Gamma_N = \emptyset$ avec

$$\Gamma_D = \{x \in \Gamma | v \cdot n < 0\}$$

avec la condition initiale $u(x, 0) = u_0(x)$, $\forall x \in \Omega$.

La formulation variationnelle du problème s'écrit :

$$\int_{\Omega} w \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla(vc) \right) dx = 0 \quad (2.49)$$

pour toute fonction test w .

Kuzmin discrétise le problème 2.49 en utilisant la méthode des éléments finis de Galerkin. Soit $\{\varphi_j\}$ ensemble des fonctions de bases. La solution numérique est définie par :

$$c_h = \sum_j c_j \varphi_j.$$

La vitesse est supposée constante donc, la discrétisation du terme de convection est donné par le terme suivant :

$$\operatorname{div}(vc_h) = v \nabla c_h$$

On définit : $(vc)_h = \sum_j vc_j \varphi_j$, donc le terme de convection est remplacé par :

$$\nabla(vc)_h = \sum_j c_j v \nabla \varphi_j$$

En utilisant les approximations précédentes dans la formule (2.49) avec une fonction test $w_h = \varphi_i$, on obtient l'équation suivante :

$$\sum_j \int_{\Omega} (\varphi_i \varphi_j) \frac{dc_j}{dt} = - \sum_j v \cdot \int_{\Omega} (\varphi_i \nabla \varphi_j) dx c_j \quad (2.50)$$

Sous forme matricielle :

$$M_c \frac{dc}{dt} = Kc \quad (2.51)$$

où c est le vecteur des inconnues, $M_c = \{m_{ij}\}$ la matrice de masse, $K = \{k_{ij}\}$ la matrice associée au terme de convection. Avec

$$m_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx$$

et

$$k_{ij} = -v \int_{\Omega} \varphi_i \nabla \varphi_j dx$$

Soit $0 = t_0 < t^1 < t^2 < \dots < t^M = T$ une suite des temps discrets pour l'intégration du système 2.51 par rapport au temps. Supposons le pas de temps $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ constant tel que $t^n = n\Delta t$. Nous avons

$$M_c(c^{n+1} - c^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} Kc dt$$

L'intégrale est estimée en utilisant un θ -schéma standard :

$$[M_c - \theta \Delta t K]c^{n+1} = [M_c + (1 - \theta) \Delta t K]c^n \quad (2.52)$$

où $\theta \in [0, 1]$.

Principe du maximum discret

Pour supprimer les (undershoots / overshoots) et assurer la préservation de la positivité, nous allons ajuster les coefficients du schéma de Galerkin pour un problème non linéaire équivalent. Nous appelons cette méthode, la méthode de correction de flux algébrique. Le problème discret (2.52) associé à l'approximation de Galerkin implicite de l'équation (2.48) est un système linéaire de la forme $A c^{n+1} = B c^n$. Dans le processus de flux algébrique, la contribution des entrées est limitée par l'ajout d'une certaine quantité de diffusion discrète. Tout d'abord, la matrice de masse M_c est remplacée par son homologue la matrice de masse lumping :

$$M_L = \text{diag}\{m_i\}; m_i = \sum_j m_{ij}$$

Après on modifie K par addition d'un opérateur de diffusion $D = \{d_{ij}\}$ avec :

$$d_{ij} := \max\{-k_{ij}, 0, k_{ij}\} = d_{ji} \text{ pour } j \neq i$$

de sorte que $K + D$ n'a pas de coefficients extra-diagonaux négatifs. Les éléments diagonaux de D sont définis de telle sorte que cette matrice symétrique a une somme de ligne zéro :

$$d_{ii} = - \sum_{j \neq i} d_{ij}$$

Par raison de symétrie, la somme des éléments d'une colonne est également égale à zéro. En résumé le schéma semi discret (2.51) peut être réparti comme suit :

$$M_L \frac{dc}{dt} = (K + D)c + f(c) \quad (2.53)$$

où $f(c)$ est la somme des termes qui peuvent détruire la positivité.

$$f(c) = (M_L - M_c) \frac{dc}{dt} - Dc$$

Chaque composante du vecteur f admet une décomposition de flux :

$$f_i = \sum_{j \neq i} f_{ij}, f_{ji} = -f_{ij}$$

La formule de f_{ij} découle des définitions de M_L , D tel que :

$$(M_L \frac{dc}{dt} - M_c \frac{dc}{dt})_i = m_i \frac{dc_i}{dt} - \sum_j m_{ij} \frac{dc_j}{dt} = \sum_{j \neq i} m_{ij} (\frac{dc_i}{dt} - \frac{dc_j}{dt})$$

$$(Dc)_i = \sum_j d_{ij} c_j = d_{ii} c_i + \sum_{j \neq i} d_{ij} c_j = \sum_{j \neq i} d_{ij} (c_j - c_i)$$

donc le flux f_{ij} est donné par :

$$f_{ij} = f_{ij}^M + f_{ij}^K$$

où

$$f_{ij}^M = m_{ij} (\frac{dc_i}{dt} - \frac{dc_j}{dt})$$

$$f_{ij}^K = d_{ij} (c_i - c_j)$$

par symétrie de M_c , D on a : $f_{ji} = -f_{ij}, \forall i \neq j$.

La représentation ci-dessus de $f(c)$ permet d'annuler les modifications inutiles des opérations de Galerkin afin de minimiser la quantité de diffusion numérique. A cette fin, nous remplaçons chaque flux f_{ij} par :

$$\overline{f_{ij}} = \alpha_{ij} f_{ij}$$

où $\alpha_{ij} \in [0, 1]$ est un facteur de correction dépendant de la solution.

La multiplication par α_{ij} est censée réduire l'amplitude du flux dans les régions où l'undershooting se produira . Donc la forme semi-discrète de la contrainte de discrétisation est donnée par :

$$M_L \frac{dc}{dt} = (K + D)c + \overline{f}(c)$$

où

$$\overline{f}_i = \sum_{j \neq i} \overline{f}_{ij}, \overline{f}_{ji} = -\overline{f}_{ij}$$

Enfin, pour calculer les α_{ij} Kuzmin utilise l'algorithme ci-dessous :

Algorithme :

$P^\pm := 0, Q^\pm := 0, \bar{f} := 0.$

For all i do

For all $j, j > i$ do

$$P_i^\pm := P_i^\pm + \max_{\min} \{0, f_{ij}\}$$

$$P_j^\pm := P_j^\pm + \max_{\min} \{0, -f_{ij}\}$$

$$Q_i^\pm := \max_{\min} \left\{ Q_i^\pm, \frac{m_i}{\Delta t} (c_j - c_i) \right\}$$

$$Q_j^\pm := \max_{\min} \left\{ Q_j^\pm, \frac{m_j}{\Delta t} (c_i - c_j) \right\}$$

For all i do

$$R_i^\pm := \min \left\{ 1, \frac{Q_i^\pm}{P_i^\pm} \right\}$$

For all i do

For all $j, j > i$ do

$$\alpha_{ij} := \min \{ R_i^\pm, R_j^\pm \}$$

$$\bar{f}_{ij} := \alpha_{ij} f_{ij}$$

$$\bar{f}_i := \bar{f}_i + \bar{f}_{ij}$$

$$\bar{f}_j := \bar{f}_j - \bar{f}_{ij}$$

Cette méthode ne peut pas être généralisée à une formulation au sens des moindres carrés car dans cette formulation le temps n'est pas privilégié.

2.5.6 Formulation au sens des moindres carrés avec pénalisation de la variation totale

Les oscillations parasites augmentent la variation totale de la solution reconstituée, par conséquent, en imposant à la variation totale d'être inférieure à la variation totale de la condition initiale, annule les oscillations. Si nous souhaitons annuler les oscillations juste en réduisant la variation totale, nous serons obligé de la réduire considérablement, en changeant les limites supérieures et inférieures de la solution calculée. Une alternative consiste à combiner une réduction de la variation totale avec une contrainte sur les valeurs de la fonction, par exemple, une contrainte de positivité réduit également la variation totale dans le cas de sous-dépassement. Afin de prouver que cette stratégie est faisable, nous introduisons un problème d'optimisation, qui permet de contrôler la variation totale de sa solution.

Commençons par rappeler les principales propriétés de l'espace des fonctions de variation bornée $BV(\Omega)$. Introduisons :

$$TV(u) = \sup \left\{ \int_Q u(x) \operatorname{div} \xi(x) dx \mid \xi \in \mathcal{C}_c^1(Q), \|\xi\|_\infty \leq 1 \right\} \quad (2.54)$$

et on définit l'espace

$$BV(Q) = \{u \in L^1(Q) \mid TV(u) < +\infty\}.$$

L'espace $BV(Q)$, muni de la norm $\|u\|_{BV(Q)} = \|u\|_{L^1} + TV(u)$ est un espace de Banach. La dérivée au sens des distributions d'une fonction $u \in BV(Q)$ est une mesure de Radon bornée, notée Du , et $TV(u) = \int_Q |Du|$ est la variation totale de u . Notons que, pour $u \in W^{1,1}(Q)$, $TV(u) = \|\nabla u\|_{L^1(Q)}$. Pour plus de détails voir [2, 3].

Soit K le cône des fonctions non négatives.

$$K = \{\varphi \in H_0 \cap BV(Q), \varphi \geq 0 \text{ p.p.}\} \quad (2.55)$$

et on note I_K sa fonction indicatrice.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$ fixé, considérons le problème d'optimisation suivant :

$$\rho_\lambda = \operatorname{argmin}_{c \in H_0 \cap BV(Q)} J(c) + \lambda TV(c) + I_K(c) = \operatorname{argmin}_{c \in H_0 \cap BV(Q)} F(c) \quad (2.56)$$

où la fonction J a été introduite dans la première section

$$J(c) = \frac{1}{2} \int_Q \left(\tilde{v}(x, t) \mid \tilde{\nabla} c(x, t) \right) - f(t, x) \Big)^2$$

Theorème 2.7 *Quelque soit λ un réel non négatif, le problème (2.56) admet une unique solution.*

Preuve.

Soit $(c_n)_n \in H_0 \cap BV(Q)$ une suite minimisante, c-à-d.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(c_n) = \inf \{F(c) \mid c \in H_0 \cap BV(Q)\} < +\infty$$

La suite $(|c_n|_{1,v})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers $c^* \in H_0$. La fonction J est convexe et s.c.i, on a

$$J(c^*) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(c_n) \quad (2.57)$$

La semi norme $|\cdot|_{1,v}$ et la norme $\|\cdot\|_{H(v,Q)}$ sont équivalentes dans H_0 , la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(Q)$, et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers c^* dans $L^2(Q)$. De plus, Q est borné, l'injection de $L^2(Q)$ dans $L^1(Q)$ est continue, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^1(Q)$ aussi, et donc elle est bornée dans $BV(Q)$ puisque $TV(c_n)$ est bornée. L'injection compacte de $BV(Q)$ dans $L^1(Q)$ donne la convergence forte dans $L^1(Q)$ d'une sous suite de $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers c^* , avec $c^* \in BV(Q)$. Puisque l'opérateur TV est s.c.i, nous avons

$$TV(c^*) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} TV(c_n) \quad (2.58)$$

Le sous espace K est convexe et fermé pour la norme L^1 , I_K est donc convexe et s.c.i, nous concluons :

$$I_K(c^*) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} I_K(c_n) \quad (2.59)$$

Enfin, nous avons :

$$F(c^*) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} F(c_n), \quad (2.60)$$

c'est à dire

$$F(c^*) \leq \inf \{F(c) \mid c \in H_0 \cap BV(Q)\} \quad (2.61)$$

L'unicité de l'argument minimal vient de la stricte convexité de la fonction J , (par la norme L^2).

□ Donnons maintenant un résultat technique concernant le comportement asymptotique de ρ_λ par rapport au paramètre λ .

Lemme 2.3 *Soit ρ_λ solution du problème (2.56). Alors l'application $Y : \lambda \mapsto \rho_\lambda$ est continue de \mathbb{R}_+ à valeurs dans $H_0 \cap BV(Q)$. Par ailleurs, l'application $T : \lambda \mapsto TV(\rho_\lambda)$ de \mathbb{R}_+ à valeurs dans \mathbb{R}_+ est continue et décroissante vers zéro.*

Preuve. Nous montrons tout d'abord que T est une fonction décroissante vers zéro. Soient $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ donnés et $\rho_{\lambda_1} = Y(\lambda_1)$, $\rho_{\lambda_2} = Y(\lambda_2)$. Par définition de Y , on peut écrire les inégalités suivantes :

$$J(\rho_{\lambda_1}) + \lambda_1 TV(\rho_{\lambda_1}) + I_K(\rho_{\lambda_1}) \leq J(\rho_{\lambda_2}) + \lambda_1 TV(\rho_{\lambda_2}) + I_K(\rho_{\lambda_2})$$

et

$$J(\rho_{\lambda_2}) + \lambda_2 TV(\rho_{\lambda_2}) + I_K(\rho_{\lambda_2}) \leq J(\rho_{\lambda_1}) + \lambda_2 TV(\rho_{\lambda_1}) + I_K(\rho_{\lambda_1})$$

Alors, la somme de ces deux inégalités donne :

$$\lambda_1 TV(\rho_{\lambda_1}) + \lambda_2 TV(\rho_{\lambda_2}) \leq \lambda_1 TV(\rho_{\lambda_2}) + \lambda_2 TV(\rho_{\lambda_1})$$

donc

$$(\lambda_2 - \lambda_1)(TV(\rho_{\lambda_2}) - TV(\rho_{\lambda_1})) \leq 0$$

c'est-à-dire

$$TV(\rho_{\lambda_2}) - TV(\rho_{\lambda_1}) \leq 0.$$

par suite, T est décroissante.

Soit $\lambda > 0$ donnée. Si on pose $\rho_\lambda = Y(\lambda)$, on a, pour tout $\rho \in H_0 \cap BV(Q)$

$$J(\rho_\lambda) + \lambda TV(\rho_\lambda) + I_K(\rho_\lambda) \leq J(\rho) + \lambda TV(\rho) + I_K(\rho)$$

En particulier,

$$J(\rho_\lambda) + \lambda TV(\rho_\lambda) + I_K(\rho_\lambda) \leq J(0) \quad (2.62)$$

Puisque J et I_K sont des fonctions non négatives, on a

$$\lambda TV(\rho_\lambda) \leq J(0)$$

Si $J(0) = 0$, alors $TV(\rho_\lambda) = 0$ pour tout $\lambda > 0$. Si $J(0) > 0$, $TV(\rho_\lambda) \leq \frac{J(0)}{\lambda}$. Dans les deux cas $TV(\rho_\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$, c'est-à-dire $T(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$.

Considérons maintenant la continuité de T . T étant une application décroissante, T est à valeurs dans $[0, T(\rho_0)]$, donc T est une application bornée. On considère une suite $(\lambda_n, \rho_{\lambda_n})$ où $\lambda_n \in \mathbb{R}^+$ et où ρ_{λ_n} est une solution du problème approché. On suppose qu'il existe $(\lambda_0, \rho_{\lambda_0})$ dans $\mathbb{R}^+ \times V_h$ tel que $(\lambda_n, \rho_{\lambda_n}) \rightarrow (\bar{\lambda}, \rho_{\bar{\lambda}})$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Par définition de ρ_λ , on a, pour tout $\rho \in V_h$,

$$J(\rho_{\lambda_n}) + \lambda_n TV(\rho_{\lambda_n}) + I_{K_h}(\rho_{\lambda_n}) \leq J(\rho) + \lambda_n TV(\rho) + I_{K_h}(\rho)$$

c'est à dire

$$J(\rho_{\lambda_n}) + \lambda_n TV(\rho_{\lambda_n}) \leq J(\rho) + \lambda_n TV(\rho) + I_{K_h}(\rho)$$

Les fonctions de V_h étant suffisamment régulières, l'application $TV : (V_h, \|\cdot\|_{H^1}) \rightarrow \mathbb{R}, \rho \mapsto \|\nabla \rho\|_{L^1}$ est continue. En passant à la limite, il vient pour tout ρ ,

$$J(\rho_{\bar{\lambda}_n}) + \bar{\lambda} TV(\rho_{\bar{\lambda}_n}) \leq J(\rho) + \bar{\lambda} TV(\rho) + I_{K_h}(\rho)$$

De plus, comme K_h est fermé, $\rho_{\bar{\lambda}} \in K_h$, et donc $I_{K_h}(\rho_{\bar{\lambda}}) = 0$. Ainsi, pour tout $\rho \in V_h$,

$$J(\rho_{\bar{\lambda}}) + \bar{\lambda} TV(\rho_{\bar{\lambda}}) + I_{K_h}(\rho_{\bar{\lambda}}) \leq J(\rho) + \bar{\lambda} TV(\rho) + I_{K_h}(\rho)$$

On en déduit que le graphe de Y est fermé.

Soit maintenant $(\bar{\lambda}, \bar{t}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que la suite $(\lambda_n, TV(\rho_{\lambda_n})) \rightarrow (\bar{\lambda}, \bar{t})$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rho_{\lambda_n} \in V_h$, $TV(\rho_{\lambda_n}) = \|\nabla \rho_{\lambda_n}\|_{L^1}$, et la suite $(\|\nabla \rho_{\lambda_n}\|_{L^1})_n$ est convergente, donc bornée. D'après l'inégalité de Poincaré, on déduit que la suite $(\|\rho_{\lambda_n}\|_{W^{1,1}})_n$ est bornée. Ainsi, on peut trouver une sous-suite qui converge : Il existe $\rho_1 \in V_h$ tel que $\rho_{\lambda_{n_k}} \rightarrow \rho_1$. Ainsi $(\lambda_{n_k}, \rho_{\lambda_{n_k}}) \rightarrow (\bar{\lambda}, \rho_1)$. Or, pour tout entier naturel k , $(\lambda_{n_k}, \rho_{\lambda_{n_k}})$ appartient au graphe de Y , donc ce qui précède montre que $(\bar{\lambda}, \rho_1)$ appartient au graphe de Y . On en déduit que $\rho_1 = \rho_{\bar{\lambda}}$. Par suite, par continuité de l'opérateur TV , $TV(\rho_{\lambda_{n_k}}) \rightarrow TV(\rho_{\bar{\lambda}})$. Or, par hypothèse, $TV(\rho_{\lambda_{n_k}}) \rightarrow \bar{t}$. Ainsi, $\bar{t} = TV(\rho_{\bar{\lambda}})$, ce qui signifie que $(\lambda_n, TV(\rho_{\lambda_{n_k}})) \rightarrow (\bar{\lambda}, TV(\rho_{\bar{\lambda}}))$. Donc le graphe de T est fermé. La fonction T étant par ailleurs bornée, on en déduit qu'elle est continue. Prouvons maintenant la continuité de Y , on procède de la même manière que précédemment. Introduisant $S : \mathbb{R}_+ \xrightarrow{\lambda \mapsto J(\rho)} \mathbb{R}_+$. Si $S(\lambda_n) = J(\rho_{\lambda_n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} s$,

$$\begin{aligned} s + \lambda TV(\rho_\lambda) + I_K(\rho_\lambda) &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(\rho_{\lambda_n}) + (\liminf_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n) TV(\rho_\lambda) + I_K(\rho_\lambda) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(\rho_{\lambda_n}) + (\liminf_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n) (\liminf_{n \rightarrow +\infty} TV(\rho_{\lambda_n})) + \liminf_{n \rightarrow +\infty} I_K(\rho_{\lambda_n}) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} (J(\rho_{\lambda_n}) + \lambda_n TV(\rho_{\lambda_n}) + I_K(\rho_{\lambda_n})) \\ &\leq J(\rho_\lambda) + \lambda TV(\rho_\lambda) + I_K(\rho_\lambda) \end{aligned}$$

Pour tout $\lambda \geq 0$,

$$s \leq J(\rho_\lambda) \tag{2.63}$$

et donc,

$$s = J(\rho_\lambda) \quad (2.64)$$

Cela montre que le graphe de S est fermé. De plus (2.62) implique que S est bornée. Donc S est continue.

Finalement, montrons la continuité de Y . Nous rappelons que ρ_λ est l'unique point limite faible de $(\rho_{\lambda_n})_{n \in \mathbb{N}}$. De plus la continuité de S donne $\|\rho_{\lambda_n}\|_{H(v,Q)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|\rho_\lambda\|_{H(v,Q)}$. Par conséquent, puisque $H(v,Q)$ est un espace de Hilbert, la sous-suite de $(\rho_{\lambda_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers ρ_λ . Ce qui montre que ρ_λ est l'unique point limite de $(\rho_{\lambda_n})_{n \in \mathbb{N}}$. On conclut que $(\rho_{\lambda_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers ρ_λ . Donc Y est continue. \square Le résultat suivant précise que en choisissant un λ approprié, il est possible de fixer la variation totale de la solution au problème (2.56).

Lemme 2.4 *Soit ρ_0 solution du problème (2.56) pour $\lambda = 0$, et supposons que $TV(\rho_0) > 0$. Pour tout $\tau \in (0, TV(\rho_0))$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $\rho_\lambda \in H_0 \cap BV(Q)$ solution du problème (2.56) telle que $TV(\rho_\lambda) = \tau$.*

Preuve.

Soit $0 < \tau \in (0, TV(\rho_0))$ donné, le lemme 2.3 affirme l'existence de $0 < \mu$ suffisamment grand tel que $T(\mu) - \tau < 0$. Compte tenu de $0 < T(0) - \tau$, la continuité de la fonction T donne l'existence de $0 < \lambda < \mu$ telle que $T(\lambda) = TV(\rho_\lambda) = \tau$. \square Les résultats précédents restent vrais dans le cadre discret, ils sont même plus facile à démontrer du fait de la continuité de l'opérateur discret de la variation totale et de la continuité de la fonctionnelle J discrète.

Formulation au sens des moindres carrées par éléments finis avec une variation totale pénalisée

Dans cette section afin de garder les notations aussi simple que possible, nous ne considérons que le cas 1D. Les situations 2D ou 3D sont directement déduites. Prenons les mêmes notations que dans la section 2.4. Introduisons le problème (2.56) approximé par la méthode des éléments finis de Lagrange. Pour $0 \leq \lambda$ fixé, il s'écrit :

$$u_h = \operatorname{argmin}_{c_h \in V_h} J(c_h) + \lambda TV(c_h) + I_{K_h}(c_h), \quad (2.65)$$

où $TV(c_h) = \|\nabla c_h\|_{L^1(Q)}$.

Pour plus de commodité numérique, nous remplaçons la variation totale par l'opérateur discret suivant :

$$TV_d(u) = \sum_{i=1}^N \|\nabla_d u(a_i)\|_2,$$

où le maillage structuré du domaine est composé de N nœuds $a_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, N$, avec

$$\nabla_d u(a_i) = (\nabla_d^1 u(a_i), \nabla_d^2 u(a_i))^t, \quad (2.66)$$

et

$$\|\nabla_d u(a_i)\|_2 = \sqrt{(\nabla_d^1 u(a_i))^2 + (\nabla_d^2 u(a_i))^2}. \quad (2.67)$$

Les opérateurs discrets sont définis par :

$$\nabla_d^1 u(a_i) = \begin{cases} \frac{1}{h_x} (u(x_i + h_x, y_i) - u(x_i, y_i)) & \text{si } x_i < N_1 \\ 0 & \text{si } x_i = N_1, \end{cases} \quad (2.68)$$

et

$$\nabla_d^2 u(a_i) = \begin{cases} \frac{1}{h_y} (u(x_i, y_i + h_y) - u(x_i, y_i)) & \text{si } y_i < N_2 \\ 0 & \text{si } y_i = N_2. \end{cases} \quad (2.69)$$

avec N_1 est le nombre de lignes et N_2 le nombre de colonnes du maillage structuré. Donc, le problème discret à résoudre s'écrit : Pour $0 < \lambda$ donné, trouver :

$$u_h = \operatorname{argmin}_{c_h \in V} J(c_h) + \lambda TV_d(c_h) + \mathbf{1}_K(c_h). \quad (2.70)$$

Considérons, maintenant une formulation matricielle du problème (2.70). Notons $u_h = \sum_{k=1}^N U_k \varphi_k$, avec $U \in \mathbb{R}^N$, prenons les mêmes notations que dans la section 2.4, on définit les fonctions

$$g_1(U) = \frac{1}{2} U^\top A U - U^\top B; \quad g_2(U) = \lambda TV_d(U) + I_{\mathbb{R}_+^N}(U). \quad (2.71)$$

Pour $0 \leq \lambda$ fixé, le problème discret s'écrit :

$$U = \operatorname{argmin}_{V \in \mathbb{R}^N} g_1(V) + g_2(V). \quad (2.72)$$

La fonction g_1 est convexe et continûment dérivable, la fonction g_2 est convexe, car elle est somme d'une fonction convexe continue (TV_d) et de la fonction indicatrice d'un ensemble convexe fermé (\mathbb{R}_+^N). Alors nous avons.

Theorème 2.8 *Supposons $\lambda \geq 0$. Le problème (2.72) a une unique solution.*

2.5.7 Algorithmes pour le calcul de la solution

Cette section est consacrée aux algorithmes de calcul de la solution du problème (2.72). Commençons par donner quelques rappels : considérons le problème de minimisation suivant :

$$\operatorname{argmin}_x h(x)$$

avec h une fonction convexe et continûment dérivable. Par la méthode de descente du gradient, la solution est calculée comme suit :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \Delta t \nabla h(x_k) \\ &= \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{1}{2} \|x - x_k + \Delta t \nabla h(x_k)\|^2 \end{aligned}$$

et par définition de la projection proximale, on déduit

$$x_{k+1} = \operatorname{prox}_{x \in \mathbb{R}^N}(x_k + \Delta t \nabla h(x_k))$$

Soit maintenant, le problème suivant :

$$\arg \min h(x) + P(x)$$

avec P une fonction convexe, alors par la méthode du gradient projeté qui est une méthode qui combine une étape proximale avec une étape du gradient, la solution est calculée comme suit :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \arg \min_x \frac{1}{2} \|x - x_k + \Delta t \nabla h(x_k)\|^2 + P(x) \\ &= \text{prox}_{\tau P}(x_k + \Delta t \nabla h(x_k)) \end{aligned}$$

Puisque la fonction g_1 est lipschitzienne, de constante notée L , alors l'algorithme FISTA introduit dans [11] peut être utilisé. Il s'écrit :

Algorithme 1

1. Soit $V_1 = U^0 \in \mathbb{R}^N$, et $t_1 = 1$.
2. Pour U^n et t^n donné calculer jusqu'à convergence :

$$- \quad V^n = \arg \min_{X \in \mathbb{R}^N} \left\{ g_2(X) + \frac{L}{2} \left\| X - \left(U^n - \frac{1}{L} \nabla g_1(U^n) \right) \right\|_2^2 \right\} \quad (2.73)$$

$$- \quad t_{n+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_n^2}}{2}, \quad (2.74)$$

$$- \quad U^{n+1} = V^n + \left(\frac{t_n - 1}{t_{n+1}} \right) (V^n - V^{n-1}). \quad (2.75)$$

Maintenant, précisons comment calculer la solution de l'équation (2.73). Soit

$$\bar{U} = U^n - \frac{1}{L} \nabla g_1(U^n),$$

donc le problème (2.73) s'écrit :

$$U = \arg \min_{X \in \mathbb{R}^K} \left\{ \frac{L}{2\lambda} \|X - \bar{U}\|_2^2 + TV_d(X) + I_{\mathbb{R}_+^N}(X) \right\}. \quad (2.76)$$

On définit les fonctions

$$G(U) = \frac{L}{2\lambda} \|U - \bar{U}\|_2^2 + I_{\mathbb{R}_+^N}(U),$$

et

$$F(\nabla_d U) = \|\nabla_d U\|_2 = TV_d(U).$$

La fonction G est uniformément convexe, et, puisque F est convexe et continue, on sait que, pour tout $P \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$

$$F(P) = \sup_{P^* \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \langle P^*, P \rangle - F^*(P^*), \quad (2.77)$$

où F^* est la transformation de Legendre de F . Par ailleurs le convexe B est défini par :

$$\mathcal{B} = \{P \in \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^K \mid \|P\|_\infty \leq 1\}.$$

On a $F^* = I_{\mathcal{B}}$, alors nous avons,

$$F(\nabla_d U) = \sup_{P \in \mathbb{R}^K} \langle P, \nabla_d U \rangle - I_{\mathcal{B}}(P).$$

La formulation primale-duale du problème (2.76) est donnée par :

$$\inf_{U \in \mathbb{R}^K} \sup_{P \in \mathbb{R}^K} \langle P, \nabla_d U \rangle + G(U) - I_{\mathcal{B}}(P). \quad (2.78)$$

Nous observons que ce problème de point selle est une formulation primale-duale du problème primal non linéaire suivant :

$$\min_U F(\nabla_d U) + G(U)$$

ou du problème dual suivant :

$$\max_P -(G^*(-\nabla_d^* U) + F^*(P))$$

On suppose que F et G sont simples, dans le sens que leurs opérateurs résolvant sont défini par :

$$X = (I + \tau \partial F)^{-1}(\tilde{P}) = \arg \min_X \left\{ \frac{\|X - \tilde{P}\|_2^2}{2\tau} + F^*(X) \right\}$$

Alors, la solution du problème (2.78) est obtenue en résolvant les deux problèmes suivants :

$$\arg \max_{P \in \mathbb{R}^N} \langle P, -\nabla_d U \rangle - F^*(P)$$

et

$$\arg \min_{U \in \mathbb{R}^N} \langle \nabla_d^* P, u \rangle + G(u)$$

En utilisant la méthode du gradient projeté énoncée dans le rappel précédent, les solutions sont données par :

$$P_{k+1} = \text{prox}_{\sigma F^*}(P_k + \sigma \nabla_d U^k)$$

et

$$U_{k+1} = \text{prox}_{\tau G}(U_k - \tau \nabla_d^* P^{k+1})$$

où ∇_d^* est l'opérateur adjoint de ∇_d , c'est à dire

$$\forall (P, U) \in Y \times X, \langle \nabla_d^* P, U \rangle_X = \langle P, \nabla_d U \rangle_Y$$

et

$$\text{prox}_{\sigma F^*} = (I + \sigma \partial F^*)^{-1}$$

$$\text{prox}_{\tau G} = (I + \tau \partial G)^{-1}$$

On utilise alors l'algorithme suivant proposé dans [19].

Algorithme 2

- *Initialisation* : On choisit $\tau_0, \sigma_0 > 0$, telle que $\tau_0 \sigma_0 \|\nabla_d X^0\|^2 < 1$, $(X^0, Y^0) \in (\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ et on pose $\bar{X}^0 = X^0$.
- *Itérations* ($n \geq 0$) : On met à jour $X^n, Y^n, \bar{X}^n, \theta_n, \tau_n, \sigma_n$ comme suit :

$$\begin{cases} Y^{n+1} = \text{prox}_{\sigma F^*}(Y^n + \sigma \nabla_d \bar{X}^n), \\ X^{n+1} = \text{prox}_{\tau G}(X^n - \tau \nabla_d^* Y^{n+1}), \\ \theta_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau_n}}, \tau_{n+1} = \theta_n \tau_n, \sigma_{n+1} = \frac{\sigma_n}{\theta_n}, \\ \bar{X}^{n+1} = X^{n+1} + \theta_n (X^{n+1} - X^n), \end{cases}$$

Dans [19], le résultat de convergence suivant est prouvé.

Lemme 2.5 Pour F une fonction convexe, propre, s.c.i et G qui est 1-uniformément convexe, propre, s.c.i, la suite (X_n, Y_n) définie dans l'algorithme 2 converge vers le point selle (U, P) de (2.78).

Maintenant, nous précisons les projections proximales.

Lemme 2.6

$$P = \text{prox}_{\tau F^*}(\tilde{P}) \iff P_i = \frac{\tilde{P}_i}{\max\left(1, \|\tilde{P}_i\|_{\mathbb{R}^2}\right)},$$

et

$$U = \text{prox}_{\tau G}(\tilde{U}) \iff U_i = \max\left(0, \frac{\lambda \tilde{U}_i + \tau L \bar{U}_i}{\lambda + \tau L}\right).$$

Preuve.

Soit $P = \text{prox}_{\sigma F^*}(\tilde{P})$. Alors

$$P = \arg \min_X \left\{ \frac{\|X - \tilde{P}\|_2^2}{2\sigma} + F^*(X) \right\}.$$

et on a aussi $\frac{\tilde{P} - P}{\sigma} \in \partial F^*(P)$. Puisque $F^* = I_{\mathcal{B}}$ avec \mathcal{B} un ensemble non vide, convexe fermé, et $\sigma \geq 0$, $\frac{\tilde{P} - P}{\sigma}$ est caractérisé par

$$\forall V \in \mathcal{B}, \left(\frac{\tilde{P} - P}{\sigma} \mid V - P \right) \leq 0,$$

alors P est une projection L^2 , $P = \Pi_{\mathcal{B}}(\tilde{P})$, ce qui prouve la première égalité. Pour

montrer la deuxième égalité, soit $U = \text{prox}_{\tau G}(\tilde{U})$. Alors

$$u = \arg \min_X \left\{ \frac{\|X - \tilde{U}\|_2^2}{2\tau} + G(X) \right\}.$$

Le premier critère d'optimalité s'écrit :

$$\frac{1}{\tau}(\tilde{U} - U) + \frac{L}{\lambda}(\bar{U} - U) \in \partial I_{\mathbb{R}_+^N}(U),$$

ce qui est équivalent à :

$$\frac{\lambda\tilde{U} + \tau L\bar{U}}{\lambda\tau} - \frac{\lambda + \tau L}{\lambda\tau}U \in \partial I_{\mathbb{R}_+^N}(U).$$

Puisque \mathbb{R}_+^N est un sous-ensemble convexe fermé, la caractérisation suivante est vraie :
Pour tout $c > 0$,

$$\forall V \in \mathbb{R}_+^N, \left(U + \frac{1}{c} \left(\frac{\lambda\tilde{U} + \tau L\bar{U}}{\lambda\tau} - \frac{\lambda + \tau L}{\lambda\tau}U \right) - U \mid V - U \right) \leq 0.$$

Pour $c = \frac{\lambda + \tau L}{\lambda\tau}$, on a

$$\forall V \in \mathbb{R}_+^N \left(\frac{\lambda\tilde{U} + \tau L\bar{U}}{\lambda + \tau L} - U \mid V - U \right) \leq 0,$$

c'est-à-dire

$$U = \Pi_{\mathbb{R}_+^N} \left(\frac{\lambda\tilde{U} + \tau L\bar{U}}{\lambda + \tau L} \right).$$

□ Rappelons

$$\nabla g_1(U) = AU - B,$$

donc l'algorithme (1) s'écrit :

Algorithme 3

- Initialisation : Pour g_1 une fonction L -lipschitzienne, soit $V_1 = U^0 \in \mathbb{R}^N$, et $t_1 = 1$.
- pour $n = 0$ à $n_{\max} - 1$: réactualiser X^n, Y^n, \bar{X}^n comme suit :

$$1- U^{n+\frac{1}{2}} = U^n - \frac{1}{L}(AU^n - F)$$

$$2- \text{ a. Pour choisir } \tau_0, \sigma_0 > 0, \text{ tel que } \tau_0 \sigma_0 \|\nabla_d\|^2 < 1, X^0 \in \mathbb{R}^N, \\ Y^0 \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \text{ et soit } \bar{X}^0 = X^0.$$

$$\text{ b. Pour } k = 0 \text{ à } k_{\max} - 1$$

$$Y_i^{k+1} = \frac{Y_i^k + \sigma \nabla_d \bar{X}_i^k}{\max\left(1, \left\|Y_i^k + \sigma \nabla_d \bar{X}_i^k\right\|_{\mathbb{R}^2}\right)}, \quad i = 1, \dots, N$$

$$X_i^{k+1} = \max\left\{0, \frac{\lambda X_i^k - \tau \lambda \nabla_d^* Y_i^{k+1} + \tau L U_i^{n+\frac{1}{2}}}{\lambda + \tau L}\right\}, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\theta_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau_k}}, \quad \tau_{k+1} = \theta_k \tau_k, \quad \sigma_{k+1} = \frac{\sigma_k}{\theta_k}$$

$$\bar{X}^{k+1} = X^{k+1} + \theta_k (X^{k+1} - X^k)$$

fin

$$3- V^n = \bar{X}^{k_{\max}}$$

$$4- t_{n+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_n^2}}{2}$$

$$5- U^{n+1} = V^n + \left(\frac{t_n - 1}{t_{n+1}}\right) (V^n - V^{n-1})$$

fin

2.6 Résultats Numériques

Nous concluons cette section avec quelques résultats numériques. Tout d'abord, pour l'exemple 1D avec une condition initiale qui est la marche se déplaçant de gauche à droite étudiée dans les sections précédentes.

Dans la figure 2.13, la solution calculée par la méthode de marche au sens des moindres carrés après 20 pas de temps est représentée sur la gauche. Sur la droite, la contrainte de positivité a été ajoutée, mais pas la contrainte de la variation totale. Nous pouvons expliquer que la contrainte de positivité est très efficace dans cet exemple parce que les oscillations se produisent sur les valeurs extrêmes du signal initial. Avec l'expérience numérique suivante, l'influence du paramètre λ est étudiée dans la figure

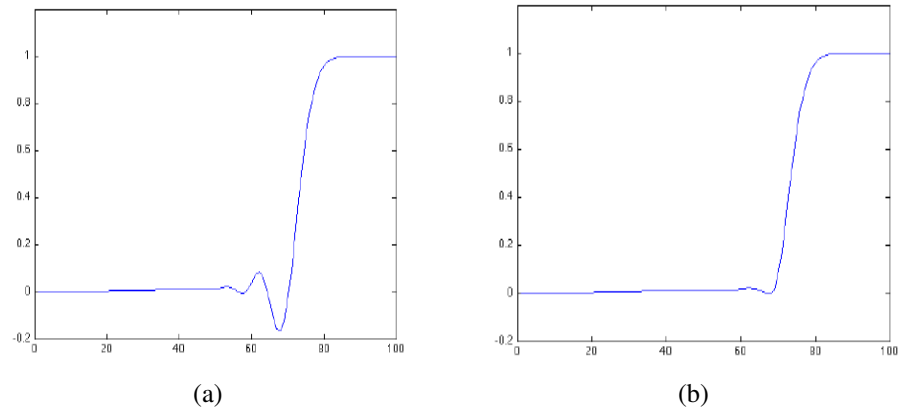


FIGURE 2.13 – (a) Solution sans aucune contrainte . (b) Solution du problème avec contrainte de positivité.

2.14. La contrainte de positivité n'est pas utilisée et TV agit sur les oscillations. Si nous voulons supprimer les oscillations le signal est déformé.

La combinaison de la contrainte de positivité et de la variation totale avec un paramètre λ petit permet d'éliminer les oscillations sans aucune modification de la forme du signal.

La variation totale du signal initial est égale à 99. Dans la figure 2.15, la solution calculée par la méthode de marche en temps est représentée à gauche, $TV = 147,51$, au milieu, la contrainte de positivité a été ajoutée, $TV = 99,11$ et sur la droite, les deux contraintes ont été ajoutées, la contrainte de positivité et une variation totale pénalisée, $TV = 99,01$. Les solutions calculées sont présentées après 20 pas de temps.

Pour montrer l'impotence de la variation totale, considérons maintenant le cas où les oscillations se produisent n'importe où, contrairement au cas précédent. Notons que la contrainte de positivité est très efficace dans l'exemple précédent. La figure 2.16 illustre ce résultat.

La variation totale du signal initial est 198. Les solutions calculées sont présentées après 20 pas de temps. Il peut être vérifié que les oscillations parasites disparaissent avec la contrainte de positivité et TV. Sur la première ligne à droite, $TV = 281,11$, sur la deuxième ligne à gauche $TV = 232,23$ et $TV = 198,03$ sur la droite.

La nécessité de la contrainte de positivité et de la variation totale apparaît clairement si nous voulons supprimer toutes les oscillations sans modifier la forme du signal, comme le montre la figure 2.17, où nous comparons deux solutions après 20 pas de temps : à gauche la solution avec seulement la pénalisation de TV, et sur la droite, la solution avec la contrainte de positivité et de la variation totale.

La variation totale des deux solutions est égale à 198,035. Le paramètre λ est significativement plus faible lorsque nous utilisons à la fois la contrainte de positivité et la contrainte de la variation totale pénalisée : $\lambda = 0,004$ et $\lambda = 0,0187$ seulement pour la contrainte de positivité.

Avant d'examiner des exemples 2D, nous montrons que le taux de convergence de la méthode des éléments finis n'est pas touché par les contraintes. Dans la figure 2.18 l'erreur est tracée en échelle logarithmique pour la formulation au sens des moindres carrés avec méthode de marche en rouge et, en bleu pour la formulation avec

contraintes de positivité et variation totale. L'ordre de convergence est de 2 pour les deux.

Un exemple 2D est maintenant considéré. Une bosse soumise à un champ de vitesse de rotation. Dans la figure 2.19 le champ de vitesse et la position initiale de la bosse sont donnés.

Dans la figure 2.20 les résultats pour la formulation au sens des moindres carrés sont présentés. La première rangée, à gauche, une projection sur le plan x, y de la bosse est tracée, à droite, une tranche sur un plan horizontal passant par le centre de la bosse est représentée. Sur la deuxième rangée, à gauche, une tranche sur un plan vertical passant par le centre de la bosse est représentée, sur la droite, la bosse est représentée après une rotation de $\frac{\pi}{2}$.

Dans la figure 2.21 les résultats pour la formulation au sens des moindres carrés avec une contrainte de positivité sont présentés. La première rangée, à gauche, une projection sur le plan x, y de la bosse est tracée, à droite une tranche sur un plan vertical passant par le centre de la bosse est représentée. Sur la deuxième rangée, à gauche, une tranche sur un plan horizontal passant par le centre de la bosse est représentée, sur la droite, la bosse est représentée après une rotation de $\frac{\pi}{2}$.

Dans la figure 2.22 les résultats pour la formulation au sens des moindres carrés avec la contrainte de positivité et de la variation totale pour $\lambda = 2$ sont présentés. La première rangée, à gauche, une projection sur le plan x, y de la bosse est tracée, à droite une tranche sur un plan vertical passant par le centre de la bosse est représentée. Sur la deuxième rangée, à gauche, une tranche sur un plan horizontal passant par le centre de la bosse est représentée, sur la droite, la bosse est représentée après une rotation de $\frac{\pi}{2}$.

Un exemple 2D est maintenant considéré avec une double bosse soumise à un champ de vitesse de rotation comme dans le cas précédent. Dans la figure 2.23 le champ de vitesse et la position initiale de la bosse sont donnés.

Dans la figure 2.24 les résultats pour la formulation au sens des moindres carrés sont présentés. Au premier rang, sur la gauche, une projection sur le plan x, y de la bosse y est représentée, sur la droite, une tranche sur un plan horizontal passant par le centre de la bosse est représentée. Sur la deuxième rangée, à gauche, une tranche sur un plan vertical passant par le centre de la bosse est représentée, sur la droite, la bosse est représentée après une rotation de $\frac{\pi}{2}$.

Dans la figure 2.25 les résultats pour la formulation au sens des moindres carrés avec une contrainte de positivité sont présentés. La première rangée, à gauche, une projection sur le plan x, y de la bosse est tracée, à droite, une tranche sur un plan horizontal passant par le centre de la bosse est représentée. Sur la deuxième rangée, à gauche, une tranche sur un plan vertical passant par le centre de la bosse est représentée, sur la droite, la bosse est représentée après une rotation de $\frac{\pi}{2}$. Le schéma numérique avec une contrainte de positivité amortit les oscillations dans la direction du champ de vitesse, mais pas dans la direction orthogonale.

Dans la figure 2.26 les résultats pour la formulation au sens des moindres carrés avec une contrainte de positivité et la variation totale avec $\lambda = 2$ sont présentés. La première rangée, à gauche, une projection sur le plan x, y de la bosse est tracée, à droite, une tranche sur un plan horizontal passant par le centre de la bosse est représentée. Sur la deuxième rangée, à gauche, une tranche sur un plan vertical passant par le centre de la

CHAPITRE 2. EQUATION DE TRANSPORT ET PRINCIPE DU MAXIMUM DISCRET

bosse est représentée, sur la droite, la bosse est représentée après une rotation de $\frac{\pi}{2}$. Le schéma numérique avec une contrainte de positivité et de la variation totale gère les oscillations dans les deux directions.

Dans la dernière figure, l'influence de λ est étudiée avec une contrainte de positivité.

Remarque. Comme dans le cas 1D, l'exemple numérique précédent montre que la contrainte de positivité ne permet pas d'éliminer les oscillations pour le saut intermédiaire du signal et justifie l'utilisation de la variation totale pénalisée.

□

Dans le tableau ci dessous la relation entre les valeurs de la variation totale de la solution numérique et la valeur de la variation totale du signal initial et les valeurs de λ sont donnés. Cela justifie la nécessité d'être légèrement inférieur à la valeur initiale de la variation totale si nous voulons annuler les oscillations.

Solution	TV	Contrainte de positivité	TV et λ
Signal initial	2.0710^4	Non	Non et $\lambda = 0$
Solution au sens des moindres carrés	2.2710^4	Non	Non et $\lambda = 0$
Solution au sens des moindres carrés	1.9310^4	Oui	Non et $\lambda = 0$
Solution au sens des moindres carrés	1.7410^4	Oui	Oui et $\lambda = 2$

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons montré que l'équation de transport peut être résolu en utilisant une approche au sens des moindres carrés qui conduit à des schémas simple à utiliser, contrairement à la méthodes de caractéristiques, ou à la méthode des éléments finis discontinus avec limiteur de flux.

Nous constatons que la méthode de Galerkin discontinue [35] et la méthode de Nitché sont incapables d'éliminer les oscillations parasites, la méthode de multiplicateur de Lagrange généralisée et la méthode de pénalisation permettent d'éliminer les under-shooting mais les oscillations intermédiaires persistent toujours.

Même si dans certains cas simples, contrôler les valeurs extrêmes de la solution calculée permet de supprimer les oscillations, un soin particulier doit être apporté dans le choix de la méthode de projection numérique pour assurer ce contrôle. Pour des situations générales une contrainte de pénalisation de la variation totale est nécessaire. Nous pouvons conclure que le schéma numérique proposé qui contrôle les valeurs extrêmes de la solution avec une pénalisation de sa variation totale est en mesure d'annuler les oscillations parasites quelle que soit la condition initiale. En outre, ce schéma nu-

CHAPITRE 2. EQUATION DE TRANSPORT ET PRINCIPE DU MAXIMUM DISCRET

mérique n'affecte pas l'ordre de la convergence de la méthode des éléments finis de Lagrange. La méthode proposée est une réponse acceptable à la carence de la méthode des éléments finis pour la résolution numérique de l'équation de transport.

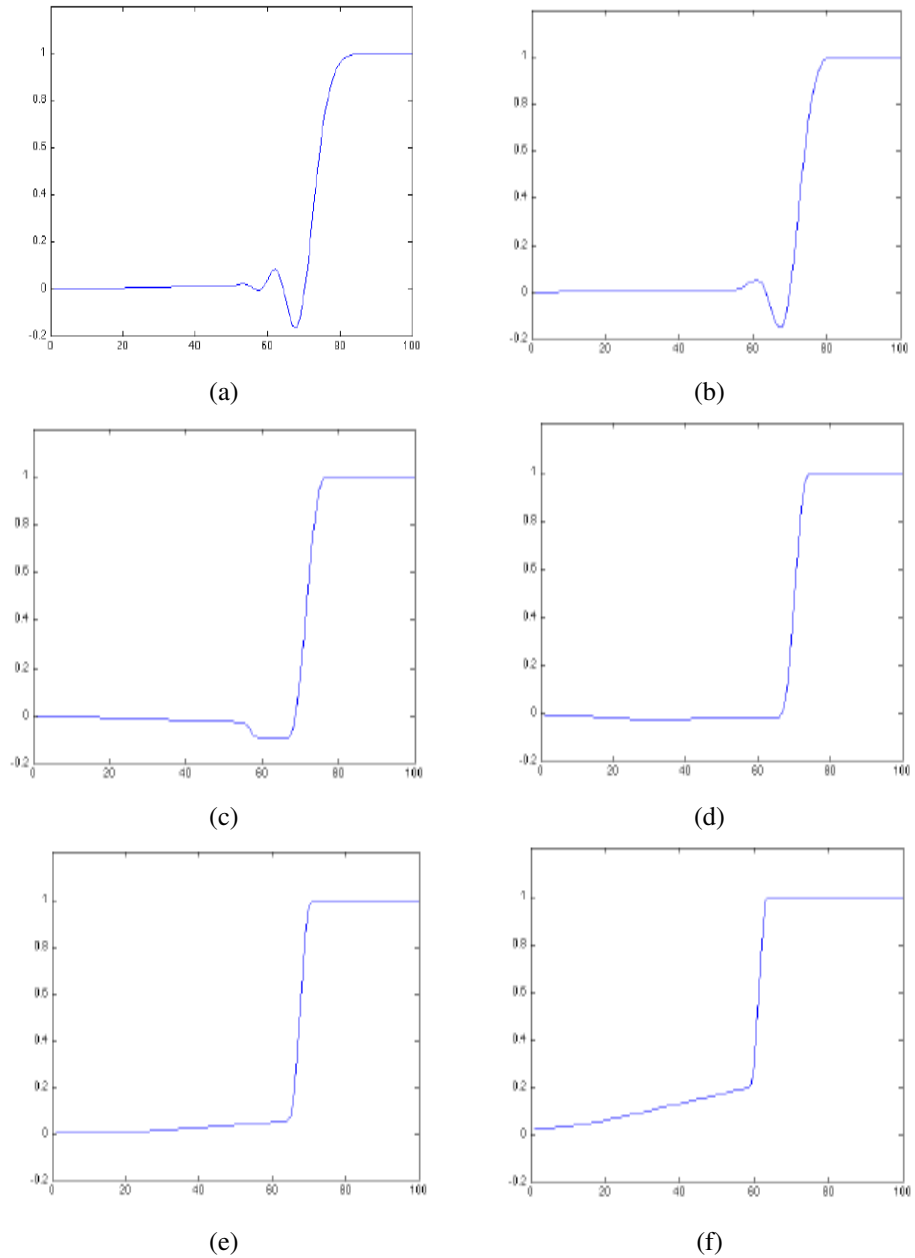


FIGURE 2.14 – (a) Solution sans aucune contraintes. (b) $\lambda = 0.001$. (c) $\lambda = 0.005$. (d) $\lambda = 0.01$. (e) $\lambda = 0.02$. (f) $\lambda = 0.05$.

CHAPITRE 2. EQUATION DE TRANSPORT ET PRINCIPE DU MAXIMUM DISCRET

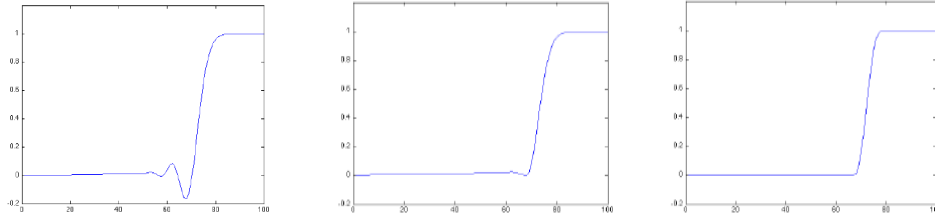


FIGURE 2.15 – (a) Solution sans aucune contraintes. (b) Solution avec la contrainte de positivité. (c) Solution avec contrainte de positivité et TV

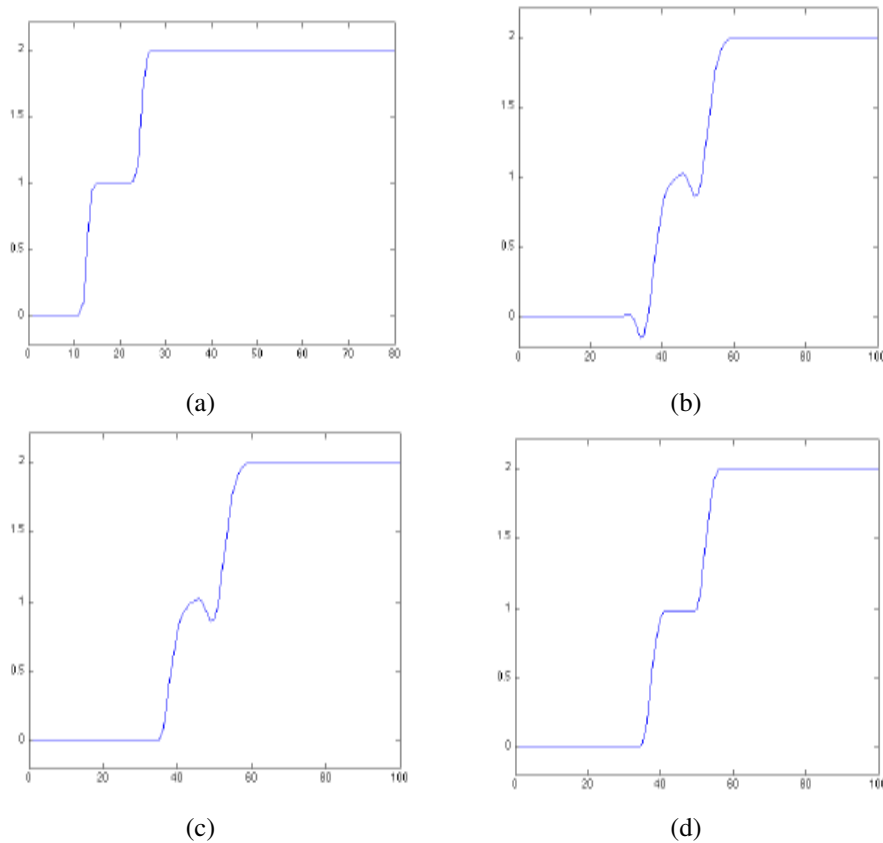


FIGURE 2.16 – (a) Signal initial. (b) Solution au sens des moindres carrés sans aucune contrainte. (c) Solution du problème avec contrainte de positivité. (d) Solution du problème avec contrainte de positivité et variation totale.

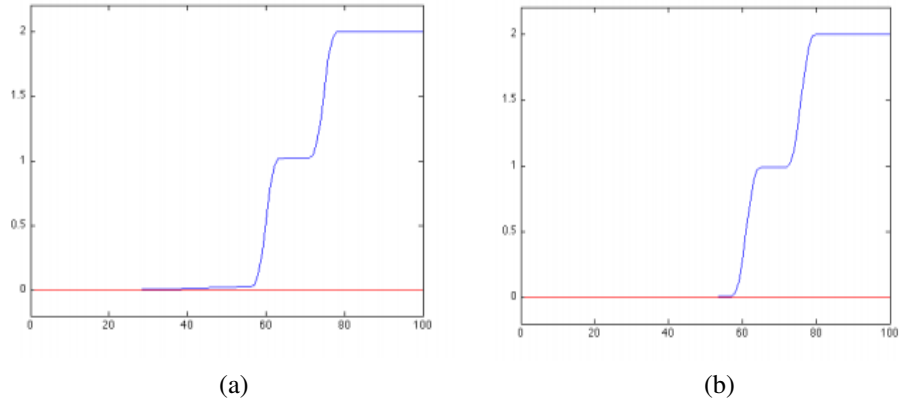


FIGURE 2.17 – (a) Solution avec pénalisation de TV. (b) Solution avec contrainte de positivité et pénalisation de TV.

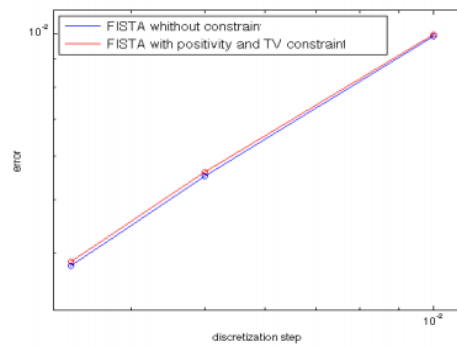


FIGURE 2.18 – Courbes de convergence pour la formulation moindres carrés et formulation moindres carrés avec contraintes de positivité et TV

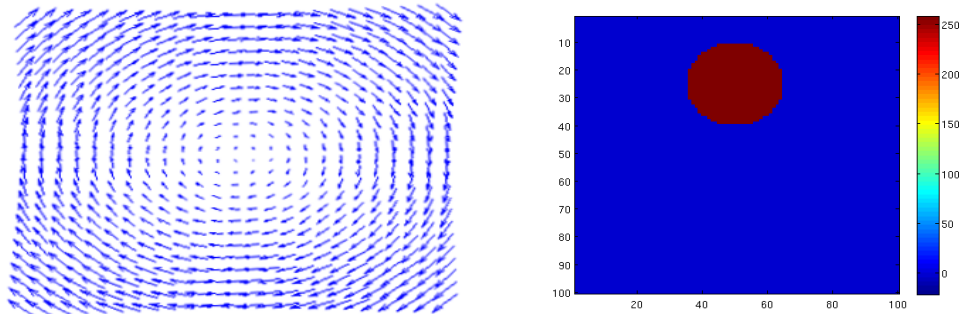


FIGURE 2.19 – A gauche champ de vecteurs . A droite position initiale de la bosse

CHAPITRE 2. EQUATION DE TRANSPORT ET PRINCIPE DU MAXIMUM DISCRET

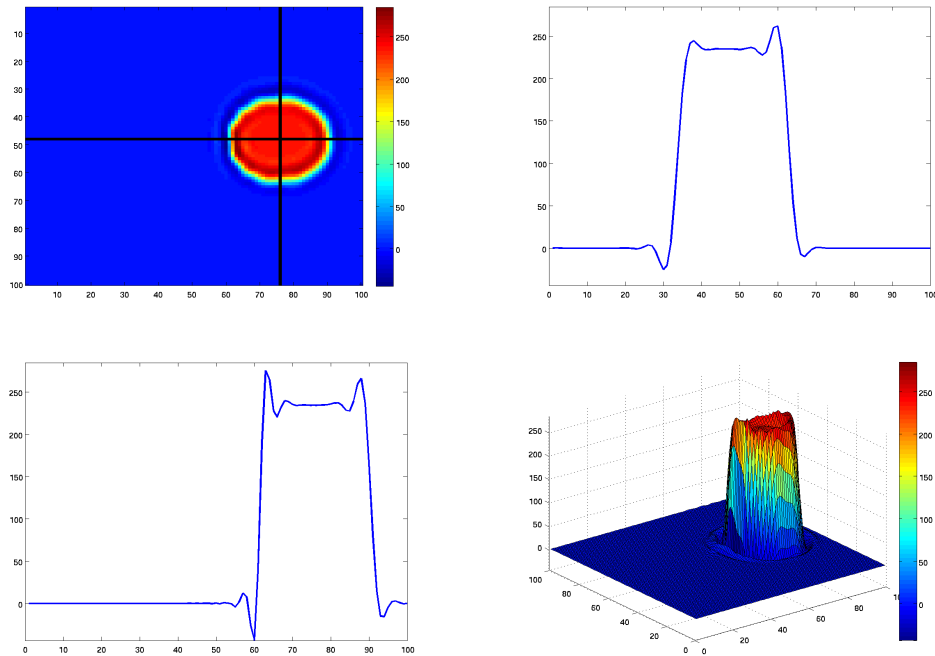


FIGURE 2.20 – Solution pour la formulation au sens des moindres carrés

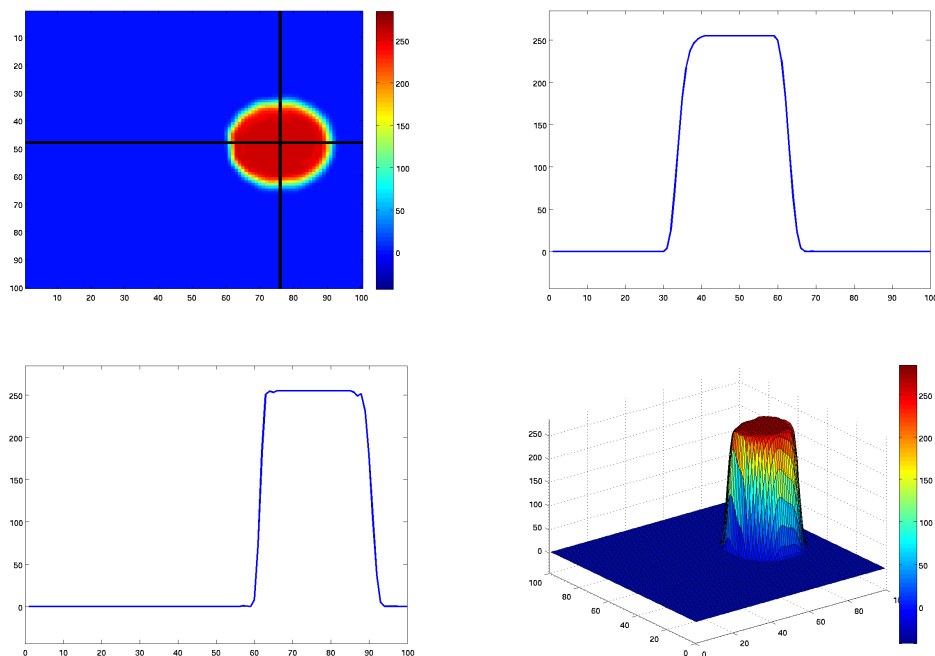


FIGURE 2.21 – Solution au sens des moindres carrés avec contrainte de positivité

CHAPITRE 2. EQUATION DE TRANSPORT ET PRINCIPE DU MAXIMUM DISCRET

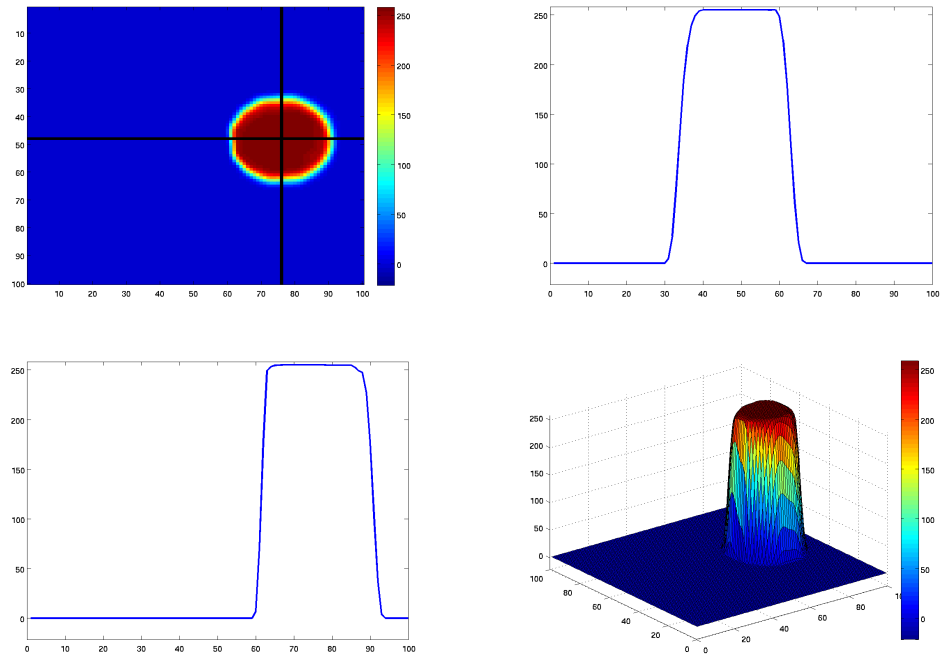


FIGURE 2.22 – Solution au sens des moindres carrés avec contrainte de positivité et TV

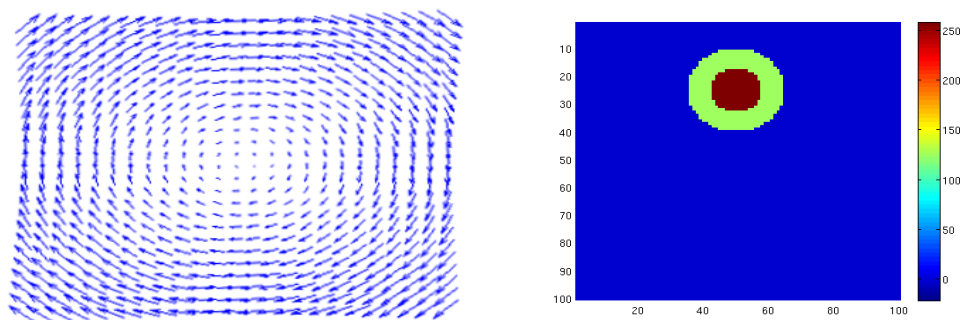


FIGURE 2.23 – A gauche champ de vecteurs . A droite position initiale de la bosse

CHAPITRE 2. EQUATION DE TRANSPORT ET PRINCIPE DU MAXIMUM DISCRET

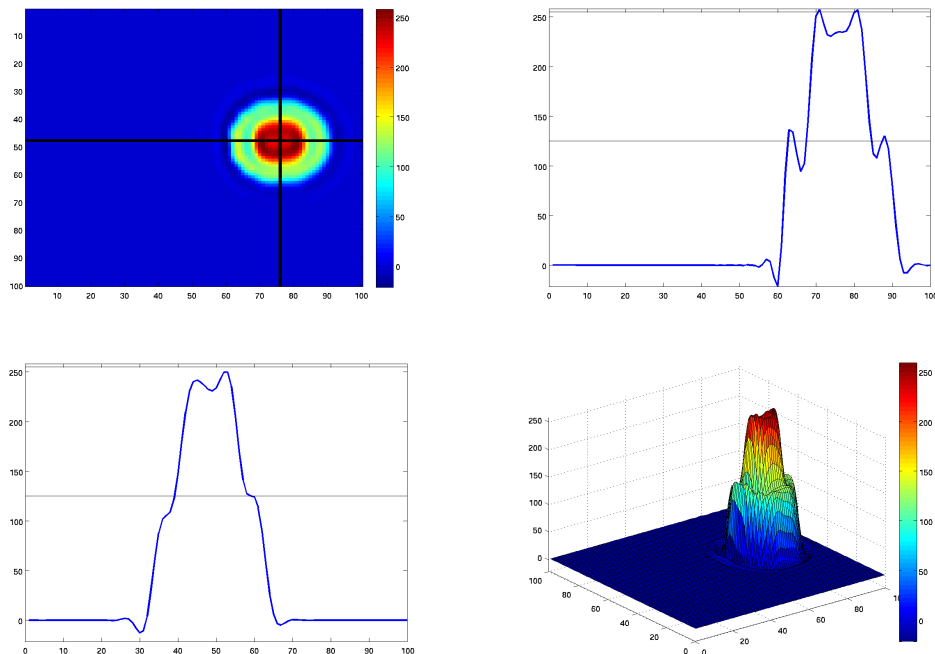


FIGURE 2.24 – Solution au sens des moindres carrés

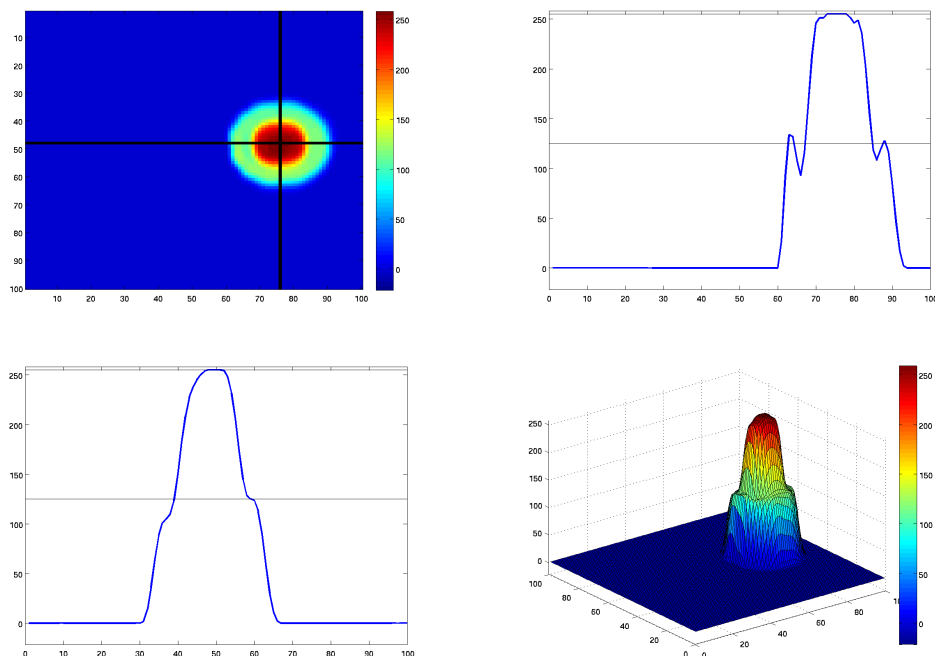


FIGURE 2.25 – Solution au sens des moindres carrés avec contrainte de positivité

CHAPITRE 2. EQUATION DE TRANSPORT ET PRINCIPE DU MAXIMUM DISCRET

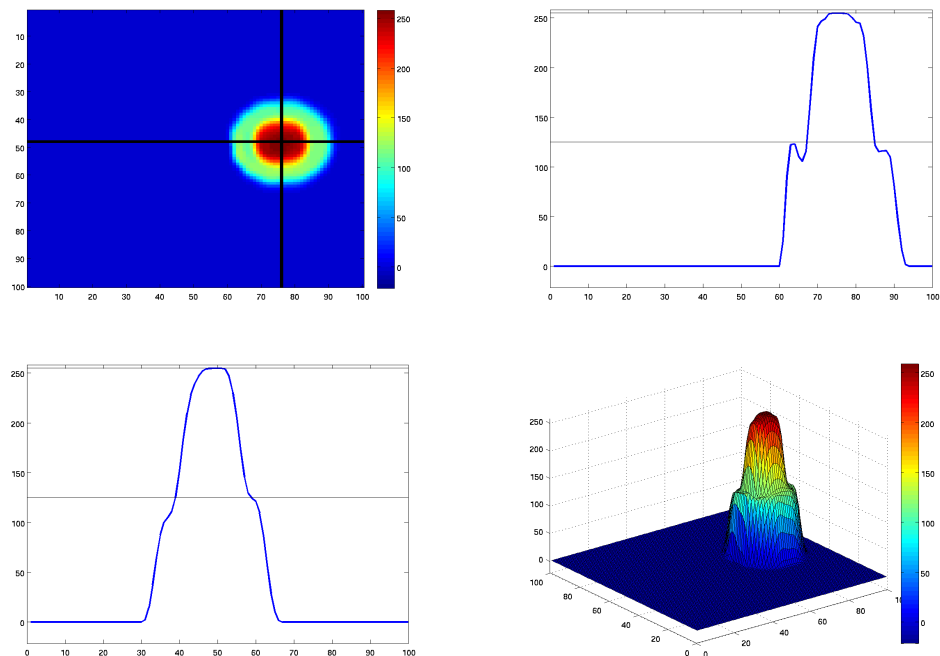
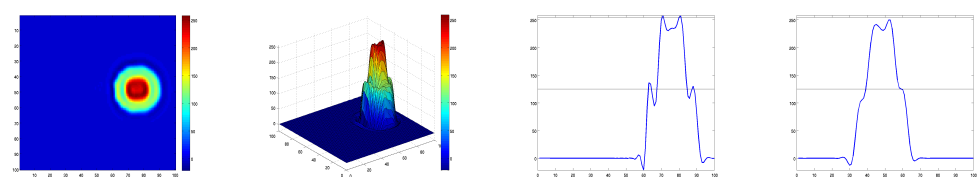
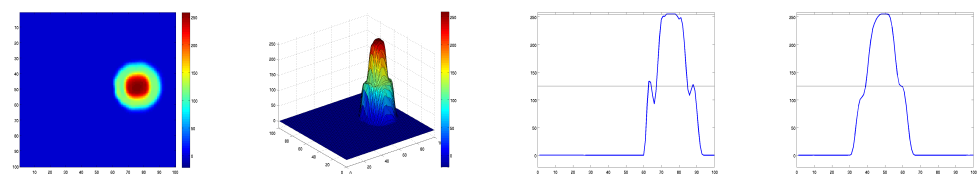


FIGURE 2.26 – Solution au sens des moindres carrés avec contrainte de positivité et TV

$\lambda = 0$

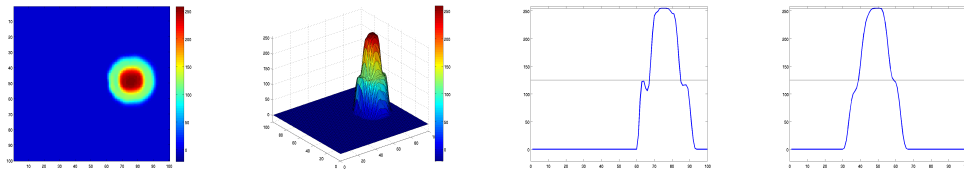


$\lambda = 0$ Avec contrainte de positivité

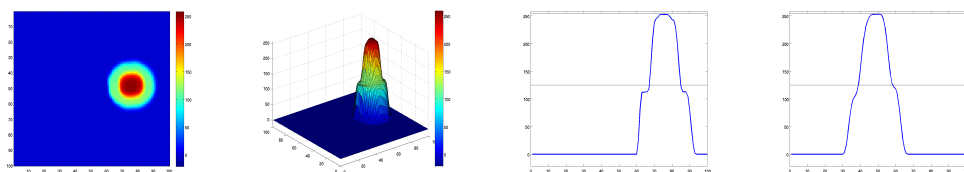


CHAPITRE 2. EQUATION DE TRANSPORT ET PRINCIPE DU MAXIMUM DISCRET

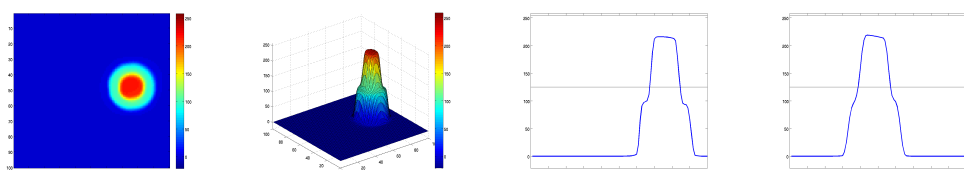
$\lambda = 1$ Avec contrainte de positivité



$\lambda = 2$ Avec contrainte de positivité



$\lambda = 10$ Avec contrainte de positivité



Une autre approche de la résolution numérique de l'équation de Transport

Cette partie est consacrée à la résolution numérique de l'équation de transport en utilisant la géométrie différentielle.

L'idée est de ne pas résoudre le problème dans le domaine initial mais de se placer sur la variété intégrale M définie par les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles et de résoudre le problème seulement sur M , à condition que la divergence de ces vecteurs propres est nulle.

Les théorèmes d'existence et d'unicité de la solution sur les variétés et pour le problème général sont reproduits en annexe.

La résolution se fait en utilisant une méthode de marche en temps comme elle a été présentée dans la partie précédente.

Le problème consiste à trouver une fonction $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant :

$$\begin{cases} \partial_t u + (\tilde{v}(x, t) | \nabla u(x, t)) = f & \text{dans } Q \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{pour } x \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

Rappelons que la formulation du problème au sens des moindres carrés est donnée par :

$$\rho = \operatorname{argmin}_{w \in H_0} \int_Q ((\tilde{v} | \tilde{\nabla} w) - f)^2 dt dx$$

avec $H_0 = H_0(v, Q, \partial Q_-) = \{\varphi \in H(v, Q), \varphi = 0 \text{ sur } \partial Q_-\}$,

$H(v, Q) = \left\{ \varphi \in L^2(Q), \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi \right) \in L^2(Q) \right\}$, v est la vitesse, ∂Q_- est la partie

entrante du bord de Q et $\tilde{\nabla} \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_d} \right)^t$ pour une fonction suffisamment régulière φ définie sur Q .

On considère l'exemple en 2D espace-temps de l'équation du transport pour $Q = (0, 1) \times (0, 1)$ et $\tilde{v} = (1, 1)^t$.

On discrétise le problème avec une méthode de Galerkin. Les éléments finis étant de type Q1. On introduit un sous espace de dimension finis V_h , on choisit une base φ_j de V_h . Sur chaque élément, la fonction inconnue est approchée par :

$$u_h = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j \quad (2.79)$$

avec $u_j = u_h(a_j)$ pour $1 \leq j \leq N$. Le problème variationnel s'écrit :

$$\sum_{\tilde{K}} \int_{\tilde{K}} (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_j) (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_i) dx dt = \sum_{\tilde{K}} \int_Q f (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_i) dx dt; \quad (2.80)$$

La formulation (2.80) correspond à un problème de diffusion avec une matrice de diffusion singulière $J = \tilde{v} \otimes \tilde{v}$, qui a un vecteur propre non nul \tilde{v} associé à la valeur propre non nulle. Dans ce cas on sait que résoudre le problème dégénéré équivaut à résoudre le problème sur la variété M qui a pour vecteur tangent \tilde{v} (voir annexe et [30]).

on propose de résoudre le problème sur un maillage déformé par les courbes intégrales du flot (voir l'annexe pour le calcul du flot). On définit $\tilde{K} = \{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \tilde{a}_4\}$ le carré courant déformé par le flot. Pour calculer les matrices, nous utilisons la technique du retour à l'élément de référence K . Soit le changement de variable T_K suivant :

$$T_K \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

et

$$T_K^{-1} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{t} \end{pmatrix}$$

Comme fonctions de base nous avons :

$$\tilde{\varphi}_1(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{\tau - \tilde{t} x_{i+1} - \tilde{x}}{\tau h}$$

$$\tilde{\varphi}_2(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{\tau - \tilde{t} \tilde{x} - x_i}{\tau h}$$

$$\tilde{\varphi}_3(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{\tilde{t} \tilde{x} - x_i}{\tau h}$$

$$\tilde{\varphi}_4(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{\tilde{t} x_{i+1} - \tilde{x}}{\tau h}$$

avec $h = \Delta x = \tau = \Delta t$. On calcule :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_K (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_j) (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_i) dx dt &= \int_{\tilde{K}} |Det M_K| \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} + \tilde{v} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x} \right) \right] \\ &\quad \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}_i}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\varphi}_i}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} + \tilde{v} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_i}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\varphi}_i}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x} \right) \right] dx dt \end{aligned}$$

avec $M_K = \begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} \int_K (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_j) (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_i) dx dt &= \int_{\tilde{K}} \left[-w \frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial \tilde{x}} \right] \left[-w \frac{\partial \tilde{\varphi}_i}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\varphi}_i}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{\varphi}_i}{\partial \tilde{x}} \right] dx dt \\ &= \int_{\tilde{K}} [(\tilde{v} - w) \frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial \tilde{t}}] [(\tilde{v} - w) \frac{\partial \tilde{\varphi}_i}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\varphi}_i}{\partial \tilde{t}}] dx dt \end{aligned}$$

Donc la matrice élémentaire est donnée par :

$$A^e = \int_{\tilde{K}} [(\tilde{v} - w) \frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial \tilde{t}}] [(\tilde{v} - w) \frac{\partial \tilde{\varphi}_i}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\varphi}_i}{\partial \tilde{t}}] dx dt \quad (2.81)$$

Par assemblage de p éléments et en prenant la condition initiale $u(0, \tilde{x}) = u_0(\tilde{x}) = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} \tanh(100(\tilde{x} + w\tilde{t}) - 50))$ on trouve les résultats présentés dans les figures ci-dessous pour 20 pas de temps. La figure (a) représente la solution où la vitesse de

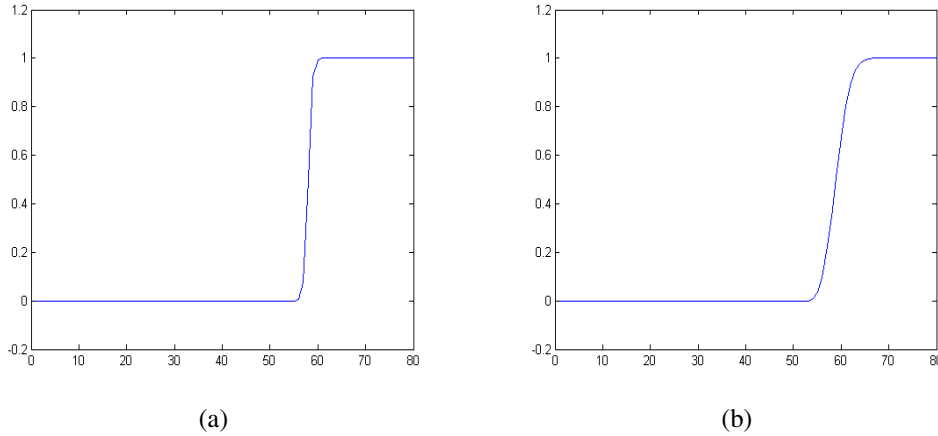


FIGURE 2.27 – (a) Solution pour $\tilde{v} = w = 1$, (b) Solution pour $\tilde{v} = 1$ et $w = 0.5$

l'équation \tilde{v} et la vitesse des points du maillage w est la même (on a utilisé le flot exact), donc on a bien la solution exacte, par contre dans la figure (b) la vitesse des points du maillage est petite par rapport à la vitesse de l'équation, alors dans ce cas la solution diffuse. Malgré ce problème de diffusion cette méthode évite les difficultés qui apparaissent dans la résolution classique par la méthode des éléments finis au sens des moindres carrés espace-temps présentée dans la partie précédente. La figure 2.28 représente les résultats obtenus sans maillage mobile, où la figure (a) représente la solution pour un seul pas de temps et la figure (b) représente la solution pour 20 pas de temps.

2.8 Conclusion

Lorsqu'on veut résoudre un problème dégénéré c'est-à-dire que $\text{Ker } J \neq \{0\}$, on peut se placer sur la sous variété M dont TM est généré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres strictement positives dans le cas où les vecteurs propres sont à divergence nulle. On peut à partir de ce résultat, construire une méthode numérique où le domaine est maillé par des éléments finis géométriques déformés par un paramétrage de la variété définie à partir des vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles et au lieu de résoudre le problème sur le domaine de référence on le résout sur le domaine déformé.

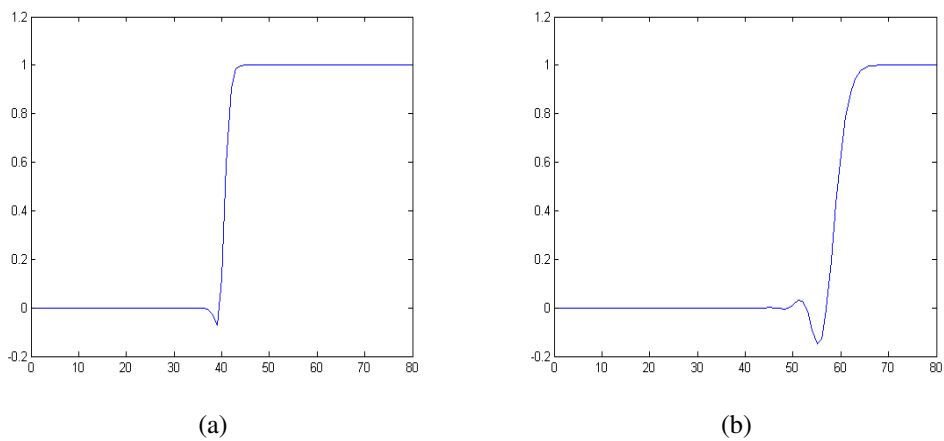


FIGURE 2.28 – (a) Solution pour un seul pas temps ; (b) Solution pour 20 pas temps.

Chapitre 3

Utilisation du transport optimal pour le suivi dynamique d'images ou la reconstruction anatomique

Sommaire

3.1	Introduction	93
3.2	Interpolation par Transport Optimal	94
3.2.1	Transport numérique 2D entre deux images	97
3.3	Algorithme de partition proximal	99
3.3.1	Les opérateurs Proximaux	99
3.3.2	Suivi dynamique d'une coupe du ventricule gauche	101
3.3.3	Reconstruction de l'anatomie du cœur	103
3.3.4	Interpolation en temps	112
3.3.5	Analyse des performances de l'algorithme	115
3.4	Conclusion	118

3.1 Introduction

L'imagerie Médicale a pris en une vingtaine d'année une place prépondérante dans l'aide au diagnostic et au traitement des pathologies humaines. La diversité d'imagerie permet d'étudier de nombreux aspects différents du Vivant, l'anatomie d'abord et aussi les fonctions métaboliques, mécaniques,...etc

Cependant, l'information utile pour le médecin est plus ou moins directement accessible. Il est aujourd'hui possible de réaliser dans l'imagerie cardiaque par exemple, une exploration du cœur en (pseudo) 3D et au cours du cycle cardiaque pour étudier l'anatomie et divers aspects fonctionnels. Un certain nombre de coupes dans le plan orthogonal au grand axe du cœur (de 3 à plus de 10) sont réalisées pour couvrir l'ensemble du cœur du patient.

A partir des séries de piles d'images résultantes, il s'agit d'extraire par exemple la

forme des structures cardiaques ou leur dynamique dans le cas où on dispose de séries temporelles de coupes. Ces opérations sont des problèmes inverses : reconstruire une forme 3D à partir d'un nombre limité de points dans l'espace, estimer le mouvement à partir de quelques "prises de vue" au cours du cycle cardiaque. La reconstruction des structures 3D avec des tranches 2D est habituellement obtenu avec des techniques d'interpolation linéaire entre les deux tranches.

L'objectif de ce chapitre est de proposer une méthode numérique qui permet de reconstruire l'anatomie du cœur, à partir d'images de coupe 2D de celui-ci à un temps fixé. Les méthodes les plus fréquentes en imagerie dynamique pour interpoler entre deux images d'une suite d'images données utilisent des déformations de maillage [76]. Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre à une méthode fondée sur la théorie du transport optimal. Le transport optimal est très peu utilisé en imagerie, sauf dans les méthodes de segmentation ou de recalage [45], mais le transport optimal a connu ces dernières années beaucoup d'intérêt de la part des mathématiciens [73] [54].

Le chapitre est organisé comme suit : dans la première partie, on présente le problème et on rappelle brièvement quelques résultats concernant la résolution par transport optimal dans le cas 1D. La deuxième section est consacrée à la résolution numérique pour le cas 2D ; on présente l'algorithme de Douglas-Rachford [28] et on traite le cas du suivi dynamique d'une image et celui de la reconstruction 3D.

3.2 Interpolation par Transport Optimal

Le modèle mathématique couramment utilisé pour décrire le mouvement d'un objet est le flot optique ou le flot optique étendu, qui exprime respectivement l'invariance du niveau de gris des pixels au cours du mouvement (ou plus précisément sur les trajectoires des pixels) ou la conservation de la quantité de gris (masse de gris)[4] [64]. Si nous notons ρ la fonction intensité de gris, et v la vitesse du mouvement apparent de la brillance ou de l'intensité de gris, une suite d'images est considérée via l'application niveau de gris $\rho : Q = (0, 1) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, le support des images, $d = 1, 2, 3$ est un domaine Lipschitzien borné. Si les points de l'images se déplacent avec un champs de vitesse $v : Q \rightarrow \mathbb{R}^d$, alors sur les trajectoires $X(t, x)$, les valeurs du niveau de gris $\rho(t, X(t, x))$ sont constantes.

C'est ce qui traduit l'équation du flot optique standard [4] :

$$\partial_t \rho(t, X(t, x)) + v \cdot \nabla_x \rho(t, X(t, x)) = 0 \quad (3.1)$$

L'hypothèse que le niveau de gris ne change pas au cours du mouvement est parfois restrictive. Une hypothèse plus faible est considérée qui remplace la constante du niveau de gris par la conservation de la masse de gris et qui est appelée l'équation du flot optique généralisé. Elle s'écrit :

$$\partial_t \rho + v \cdot \nabla_x \rho + \operatorname{div}(v) \rho = 0 \quad (3.2)$$

L'équation précédente conduit à un problème mal posé, car il n'y a qu'une équation, pour plusieurs inconnus : le niveau de gris ρ et la vitesse v . Des formulations variationnelles ou des problèmes de minimisation pour calculer simultanément (ρ, v) ont été proposées, d'abord par [48] puis après par beaucoup d'autres auteurs. Ici, on cherche (ρ, v) simultanément en résolvant le problème de transport optimal de masse.

Commençons par présenter le problème de transport optimal de masses.

CHAPITRE 3. UTILISATION DU TRANSPORT OPTIMAL POUR LE SUIVI DYNAMIQUE D'IMAGES OU LA RECONSTRUCTION ANATOMIQUE

Le problème de transport optimal se formule comme suit : On considère deux densités strictement positives, continues et définies sur un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ vérifiant :

$$\int_{\Omega} \rho_0(x) dx = \int_{\Omega} \rho_1(x) dx = 1$$

On dira que les densités ont la même masse, normalisée à 1. Dans l'application du traitement d'images, ces densités correspondent aux niveaux de gris.

Le problème consiste à déterminer une application $M : \Omega \rightarrow \Omega$, qui transporte ρ_0 vers ρ_1 , tel que pour tout sous ensemble mesurable A de Ω , M satisfait

$$\int_{x \in A} \rho_0(x) dx = \int_{M(A)} \rho_1(y) dy$$

et minimise :

$$\int_{\Omega} C(x, M(x)) \rho_0(x) dx$$

où $C(x, y) \geq 0$ est le coût du transport de $x \in \Omega$ vers $y \in \Omega$.

Si M est différentiable et bijective, alors

$$\int_{x \in A} \rho_0(x) dx = \int_{M(A)} \rho_1(y) dy$$

est équivalente à

$$\rho_0(x) = \rho_1(M(x)) |det(\nabla M(x))|$$

On considère ici le transport optimal L^2 , on définit donc $C(x, y) = \|x - y\|^2$.

Le problème admet un unique transport optimal T qui s'écrit sous la forme du gradient d'une fonction convexe ψ :

$$M(x) = \nabla \psi(x)$$

Alors la fonction ψ est solution de l'équation de Monge-Ampère suivante :

$$det(\partial^2 \psi(x)) \rho_1(\nabla \psi(x)) = \rho_0(x)$$

Donc la solution du problème de transport optimal s'obtient par la résolution de l'équation précédente.

Puisque cette équation est non linéaire, Benmaou-Brenier ont proposé de reformuler le problème dans un autre contexte.

En considérant un intervalle de temps fixé $[0, T]$, et pour toute fonction $\rho(x, t) \in \mathbb{R}_+^*$ et $v(x, t) \in \mathbb{R}^d$, ils ont montré que le problème de transport optimal dépendant du temps est équivalent à minimiser " l'énergie cinétique " liée au déplacement du niveau de gris :

$$Arg \min_{\rho, v} \int_Q \rho(x, t) \|v(x, t)\|^2 dx dt \quad (3.3)$$

où $Q = \Omega \times (0, T)$, sous la contrainte

$$\begin{cases} \partial_t \rho(x, t) + div(v(x, t) \rho(x, t)) = 0, \text{ dans } \Omega \times (0, T), & (v \cdot n) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ \rho(x, 0) = \rho_0; & \rho(x, 1) = \rho_1. \end{cases} \quad (3.4)$$

$(\cdot | \cdot)$ désigne le produit scalaire, et n est la normale extérieure à $\partial\Omega$.

Dans ce paragraphe nous présentons brièvement le cas 1D et sa résolution numérique.

Soit ρ_0 et ρ_1 deux fonctions strictement positives, minorées par des constantes positives, continues, et définies sur un intervalle borné $[x_l, x_r]$. Les deux fonctions sont normalisées à 1 :

$$\int_{x_l}^{x_r} \rho_0(x) dx = \int_{x_l}^{x_r} \rho_1(x) dx = 1$$

On cherche une application $M : [x_l, x_r] \rightarrow [x_l, x_r]$ qui satisfait :

$$\int_{x_l}^{x_r} f(M(x)) \rho_0(x) dx = \int_{x_l}^{x_r} f(y) \rho_1(y) dy \quad (3.5)$$

pour tout $f \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, et pour laquelle l'infimum de

$$\int_{x_l}^{x_r} |M(x) - x|^2 \rho_0(x) dx$$

est atteint. Cette quantité définit la distance de Kantorovich-Wassertein entre ρ_0 et ρ_1 . Puisque nous travaillons avec des intervalles et des fonctions continues, M est un difféomorphisme. M est une distribution de masse entre ρ_0 et ρ_1 et vérifie :

$$\begin{cases} \rho_0 &= M' \rho_1(M) \\ M(x_l) &= x_l \end{cases} \quad (3.6)$$

D'après le résultat de Benamou-Brenier [16], le carré de la distance de Kantorovich-Wassertein entre ρ_0 et ρ_1 est égale à

$$\inf_{\rho, v} \int_{x_l}^{x_r} \int_0^1 \rho(x, t) |v(x, t)|^2 dx dt$$

pour (ρ, v) , satisfaisant : $0 \leq \rho$

$$\begin{cases} \partial_t \rho(x, t) + \operatorname{div}((v(x, t) \rho(x, t))) = 0, \text{ dans } [x_l, x_r] \times (0, 1) \\ v(x_l, \cdot) = v(x_r, \cdot) = 0; \quad \rho(x, 0) = \rho_0; \quad \rho(x, 1) = \rho_1. \end{cases} \quad (3.7)$$

En outre, le minimum est atteint pour le couple (ρ, v_M) avec M défini par (3.6), et $X(t, x) = (1 - t)x + tM(x)$, tel que, pour toute fonction continue f , X vérifie :

$$\int_{x_l}^{x_r} \int_0^1 f(x, t) \rho(x, t) dx dt = \int_{x_l}^{x_r} \int_0^1 f(t, X(t, x)) \rho_0(x) dx dt$$

cela donne, $v_M(x, t) = M(X^{-1}(x, t)) - X^{-1}(x, t)$.

La résolution numérique de ce problème se fait de la manière suivante. Prenons par exemple l'intervalle égale à $(0, 1)$, nous introduisons une subdivision $\{x_j\}_{j=0}^J$ de l'intervalle où J étant fixé, pour $0 \leq j \leq J$, $x_j = j\delta w$ avec $\delta w = \frac{1}{J}$. Tout d'abord on calcule la solution approchée du problème (3.6) par le schéma implicite d'Euler suivant :

$$\begin{cases} M^{j+1} &= M^j + \delta x \frac{\rho_0(x_{j+1})}{\rho_1(M^{j+1})} \\ M^0 &= 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Ensuite, nous cherchons une solution approchée de l'équation de transport (3.7). Pour cela, on définit $t_n = n \frac{1}{N}$ pour $0 \leq n \leq N$. Alors pour tout (x_j, t_n) , on

calcule $X^{-1}(x_j, t_n)$ avec $X(x_j, t_n) = (1 - t_n)x_j + t_n M(x_j)$ puis on évalue la vitesse, $v_M(x_j, t_n) = M(X^{-1}(x_j, t_n)) - X^{-1}(x_j, t_n)$. Par suite par une méthode des moindres carrés on calcule $\rho(x_j, t_n)$, pour $0 \leq n \leq N$ et $0 \leq j \leq J$ la solution approchée de (3.7).

3.2.1 Transport numérique 2D entre deux images

Dans cette partie la résolution numérique par transport optimal pour les images 2D est introduite, ensuite nous appliquons cette méthode d'une part pour extraire la dynamique du cœur pour une coupe de celui-ci perpendiculaire au grand axe du cœur et d'autre part pour la reconstruction 3D du cœur à partir d'image de coupe 2D de celui-ci.

On considère deux densités $\rho_0, \rho_1 : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

$$\int_{[0,1]^2} \rho_0(x) dx = \int_{[0,1]^2} \rho_1(x) dx = 1$$

Benamou et Brenier [16] ont montré que le problème de transport optimal présenté dans la section précédente, résout le problème suivant pour la densité $\rho(x, t) \in \mathbb{R}_+^*$ et la vitesse $v(x, t) \in \mathbb{R}^2$.

$$\min_{(v, \rho) \in C^0} \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\Omega} \rho(x, t) \|v(x, t)\|^2 dt dx \quad (3.9)$$

où $\Omega = [0, 1]^2$ est le domaine spatial, n sa normale sortante et l'ensemble des contraintes non linéaires est défini par :

$$C^0 = \{(v, \rho) : \operatorname{div}(\rho v) + \partial_t \rho = 0, \rho(\cdot, 0) = \rho_0, \rho(\cdot, 1) = \rho_1, (v|n) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T)\}$$

Comme dans [16], on effectue le changement de variable $(v, \rho) \mapsto (m, \rho)$, où $m = \rho v$, on obtient alors le problème d'optimisation convexe pour le couple (m, ρ) :

$$\min_{(m, \rho) \in C} \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{\|m(x, t)\|^2}{\rho(x, t)} dt dx \quad (3.10)$$

et l'ensemble des contraintes linéaires s'écrit :

$$C = \{(m, \rho) : \operatorname{div}(m) + \partial_t \rho = 0, \rho(\cdot, 0) = \rho_0, \rho(\cdot, 1) = \rho_1, (m|n) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T)\}$$

Avant de présenter la méthode numérique, nous donnons quelques commentaires sur le problème de minimisation sous contrainte. Soit à résoudre le problème suivant :

$$\arg \min \frac{r^2}{h} + I_{\{r^2 + (h - \alpha/2)^2 = \frac{\alpha^2}{4}\}}$$

où I est la fonction indicatrice des $(r, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ tels que : $r^2 + (h - \alpha/2)^2 = \frac{\alpha^2}{4}$. La fonctionnelle $J(r, h) = \frac{r^2}{h}$ est convexe et est représentée par la figure 3.2.1. Elle admet une infinité de minima.

L'intersection de J avec l'ensemble des contraintes qui représente dans ce cas un cercle de centre $(0, \frac{\alpha}{2})$ et de rayon $\frac{\alpha}{2}$ pour α quelconque, est réduit à un seul point. Donc on conclut que l'ajout de la contrainte désingularise la fonctionnelle J .

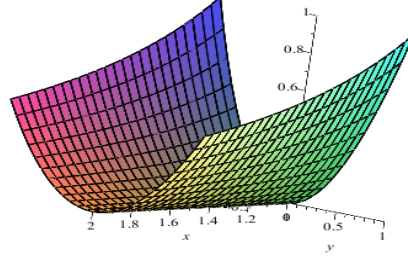


FIGURE 3.1 – La fonctionnelle J.

- Passons maintenant à la résolution numérique. Donnons deux images ρ_0 et ρ_1 , nous calculons un processus d'évolution $\rho(t, \cdot)$ qui transporte ρ_0 vers ρ_1 . Le domaine spatial est discrétisé sur une grille rectangulaire spatiale de taille $N = n \times n$. Le domaine temporel $[0, 1]$ est discrétisé avec p points.

Introduisons les variables discrètes $w \in \mathbb{R}^{(N \times p)^2} \times \mathbb{R}^{N \times p}$ qui représente une approximation de la solution (m, ρ) du problème d'optimisation (3.10) en tous les points de la grille espace-temps $(m_{j,k}, \rho_{j,k}) \simeq (m(x_j, t_k), \rho(x_j, t_k))$. w est un 3-vecteur en chaque point de la grille espace-temps $w_{j,k} = (m_{j,k}, \rho_{j,k})$, $1 \leq j \leq N$, $1 \leq k \leq p$. La grille espace-temps étant régulière la fonctionnelle approchée s'écrit :

$$J(w) = \sum_{x_j, t_k} \frac{\|m_{j,k}\|_2^2}{\rho_{j,k}}$$

Le problème initial (3.10) est approché en résolvant le problème convexe de dimension finie suivant :

$$\min_w J(w) + I_{C_h}(w) \quad (3.11)$$

où I_{C_h} est la fonction indicatrice associée à l'ensemble convexe fermé C_h , telle que

$$I_{C_h}(w) = \begin{cases} 0, & \text{si } w \in C_h \\ \infty, & \text{sinon} \end{cases}$$

L'ensemble des contraintes discrètes C_h correspond à une approximation de l'équation de continuité $\widetilde{\text{div}}(w) = 0$, où $\widetilde{\text{div}}$ est l'opérateur de divergence espace-temps $\widetilde{\text{div}} = \text{div}(\cdot) + \partial_t \cdot$, les conditions aux limites pour le champs w sont

$$(w|\tilde{n}) = \begin{cases} 0, & \text{pour } \tilde{n} \text{ normale } \partial\Omega \times (0, 1) \\ \rho_1, & \text{pour } \tilde{n} = \{0, 0, 1\}^t \\ \rho_0, & \text{pour } \tilde{n} = \{0, 0, -1\}^t \end{cases} \quad (3.12)$$

On note A la matrice de l'opérateur de divergence espace-temps discrétisé et r_0 le vecteur de $\mathbb{R}^{(N \times p)^2} \times \mathbb{R}^{N \times p}$ défini par :

$$r_0 = \begin{cases} 0, & \text{pour } 2 < p < n - 1, 1 \leq j \leq N \\ \rho_0(x_j), & \text{pour } p = 1, 1 \leq j \leq N \\ \rho_1(x_j), & \text{pour } p = n, 1 \leq j \leq N \end{cases}$$

La matrice A est modifiée de manière classique afin de prendre en compte les conditions aux limites (3.12). L'ensemble des contraintes s'écrit :

$$C_h = \left\{ w \in \mathbb{R}^{(N \times p)^2} \times \mathbb{R}^{N \times p} : Aw = r_0 \right\} \quad (3.13)$$

3.3 Algorithme de partition proximal

Dans cette section, nous donnons le schéma pour résoudre (3.11) proposé dans [60]. Cela nécessite de calculer les opérateurs proximaux de la fonction J et de la fonction indicatrice de l'ensemble des contraintes I_{C_h} .

3.3.1 Les opérateurs Proximaux

La minimisation d'une fonctionnelle F sur un espace de Hilbert H nécessite l'utilisation d'algorithmes adaptés aux propriétés spécifiques de la fonctionnelle. Les fonctions régulières peuvent être minimisées grâce à l'algorithme de descente de gradient, ce qui est impossible dans le cas que l'on considère, car la fonctionnelle $J \rightarrow +\infty$ quand $\rho \rightarrow 0$. L'utilisation de la méthode de descente du gradient est impossible car le gradient de J n'est pas Lipschitz.

Remarquons qu'une méthode de descente du gradient s'écrit :

$$w^{n+1} = w^n + \alpha D J(w^n)$$

ce qui est la version explicite du problème de minimisation

$$w^{n+1} = \arg \min_w \frac{1}{2} \|w - w^n\|^2 + \alpha J(w)$$

La méthode qu'on utilise ici est appelée méthode de partition proximale et est une généralisation pour des J non différentiable.

L'opérateur proximal $Prox_{\gamma F} : H \rightarrow H$ pour une fonction convexe, semi continue inférieure $F : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est défini par :

$$Prox_{\gamma F}(z) = \arg \min_{q \in H} \|z - q\|^2 + \gamma F(q)$$

Pour permettre l'utilisation de ces opérateurs, il est nécessaire d'être capable de les calculer.

Calcul de l'opérateur proximal de la fonctionnelle J . L'opérateur proximal de la fonctionnelle J est défini pour $w_0 \in \mathbb{R}^{(N \times p)^2} \times \mathbb{R}^{N \times p}$ par :

$$Prox_{\lambda J}(w) = \arg \min_w \frac{1}{2} \|w - w_0\|^2 + \lambda J(w) \quad (3.14)$$

La fonctionnelle convexe discrète s'écrit

$$J(w) = J(m, \rho) = \sum_{1 \leq j \leq N, 1 \leq k \leq p} j(m_{j,k}, \rho_{j,k})$$

avec

$$\forall (u, q) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*, \quad j(u, q) = \frac{\|u\|_2^2}{q}.$$

L'opérateur proximal de J est calculé, avec l'opérateur proximal de j pour chaque composante

$$Prox_{\lambda j}(w_{j,k})$$

On résout le couple d'équations que fournissent les conditions d'optimalité d'Euler de (3.14)

$$\begin{cases} 2\lambda \frac{m}{\rho} + m - m_0 &= 0 \\ -\lambda \frac{\|m\|^2}{\rho^2} + \rho - \rho_0 &= 0 \end{cases}$$

Ici pour ne pas alourdir les notations les indices j et k sont supprimés, mais les calculs sont effectués pour tous les $1 \leq j \leq N$ et $1 \leq k \leq p$. Alors l'opérateur proximal de J est donné par

$$(m, \rho) = Prox_{\lambda j}(m_0, \rho_0)$$

avec

$$m = \frac{m_0}{1 + 2\lambda/\rho}$$

et ρ est la plus grande racine réelle du polynôme de troisième ordre suivant

$$P(\rho) = \rho^3 + (4\lambda - \rho_0)\rho^2 + (4\lambda^2 - 4\lambda\rho_0)\rho - (\lambda\|m_0\|^2 + 4\lambda^2\rho_0) = 0$$

Calcul de l'opérateur proximal de la fonction indicatrice L'opérateur proximal de la fonction indicatrice $G = I_{C_h}$ est un opérateur de projection et est défini par

$$Prox_G(w) = Proj_{C_h}(w) = \frac{1}{2} Arg \min_{Aw=r_0} \|w - w_0\|^2$$

Une méthode de multiplicateur de Lagrange pour la contrainte fournit

$$\begin{cases} Arg \min \frac{1}{2} \|w - w_0\|^2 + \lambda^t(Aw) \\ Aw = r_0 \end{cases}$$

L'annulation de la dérivée est donnée par

$$\begin{cases} w - w_0 + A^*\lambda = 0 \\ Aw = r_0 \end{cases}$$

il vient, en éliminant λ de l'équation précédente

$$Prox_{\lambda G} = Proj_{C_h}(w) = w_0 + A^*(AA^*)^{-1}(r_0 - Aw_0) \quad (3.15)$$

Algorithme de Douglas-Rachford Ce qui est aujourd'hui appelé l'algorithme Douglas-Rachford remonte à une méthode initialement proposée dans [36] pour résoudre les équations de la forme $u = Ax + Bx$ où A et B sont des matrices définies positives. La méthode a été ensuite transformée en [51] pour traiter des problèmes non linéaires et améliorée dans [52] pour résoudre des problèmes d'inclusion monotone. L'algorithme de Douglas-Rachford (DR) est une méthode de partition proximale qui permet de résoudre

$$arg \min_w G_1(w) + G_2(w) \quad (3.16)$$

où G_1 et G_2 sont deux fonctions convexes définies sur un espace de Hilbert. Dans notre cas on prend $G_1(w) = J(w)$ et $G_2(w) = I_{C_h}(w)$.

L'algorithme de (DR) itératif définit une suite $(w^{(l)}, z^{(l)})$ à partir d'une initialisation $(w^{(0)}, z^{(0)})$ par :

$$\begin{cases} z^{(l+1)} &= z^{(l)} + \alpha[Prox_{\gamma J}(2w^{(l)} - z^{(l)}) - w^{(l)}] \\ w^{(l+1)} &= Prox_{\gamma G}(z^{(l+1)}) \end{cases} \quad (3.17)$$

Pour $0 < \alpha < 2$ et $0 < \gamma$, deux paramètres
On peut montrer que $z^{(l)} \rightarrow z^*$ solution de (3.16) [28].

3.3.2 Suivi dynamique d'une coupe du ventricule gauche

On considère une image cardiaque d'une coupe 2D à deux temps différents et nous cherchons à trouver une séquence d'images intermédiaires afin d'extraire la dynamique du cœur au cours du cycle cardiaque, fin de diastole, fin de systole, de sorte que la première image de la séquence est égale à la première image donnée et la dernière image à la deuxième image donnée en utilisant l'algorithme (3.17).

Prenons une image initiale ρ_0 représentant une coupe 2D du ventricule gauche d'un patient en fin de diastole, et une image finale ρ_1 représentant une coupe 2D du même patient en fin de systole, présentées ci-dessous.

Toutes les figures présentées dans cette partie sont de taille 40×40 .

Pour un traitement d'image satisfaisant, on abandonne les structures qui ne nous inté-

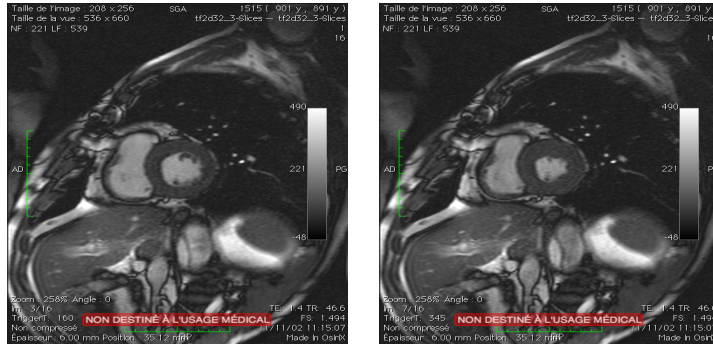


FIGURE 3.2 – Image initiale à gauche, image finale à droite

resse pas, et on ne considère que les ventricules gauche et droit du cœur. La figure 3.3 représente une suite de quatre images obtenues par transport optimal, la première et la dernière étant données.

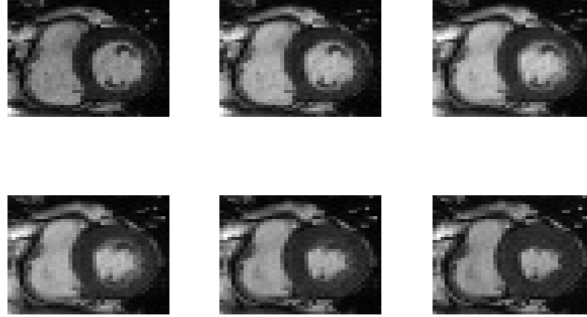


FIGURE 3.3 – Images intermédiaires simulées après 2000 itérations de (3.17)

La figure 3.5 représente la différence en norme L^2 entre les images IRM acquises et les images simulées tels que, la différence pour le premier temps est comprise entre $-9.42e^{-4}$ et $9.42e^{-4}$, la différence pour le second temps est comprise entre $-9.42e^{-4}$ et $9.42e^{-4}$, la différence pour le troisième temps est comprise entre -0.0015 et 0.0013 et enfin la différence pour le dernier temps est comprise entre 0.0012 et 0.0014 . Toutes les figures présentées dans cette partie se lient de gauche à droite puis de haut en bas.

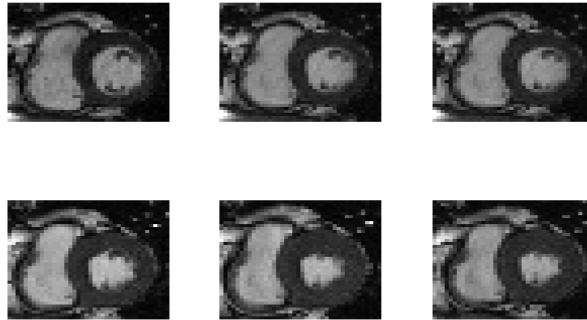


FIGURE 3.4 – Images IRM aux mêmes temps que dans la séquence que la figure 3.3

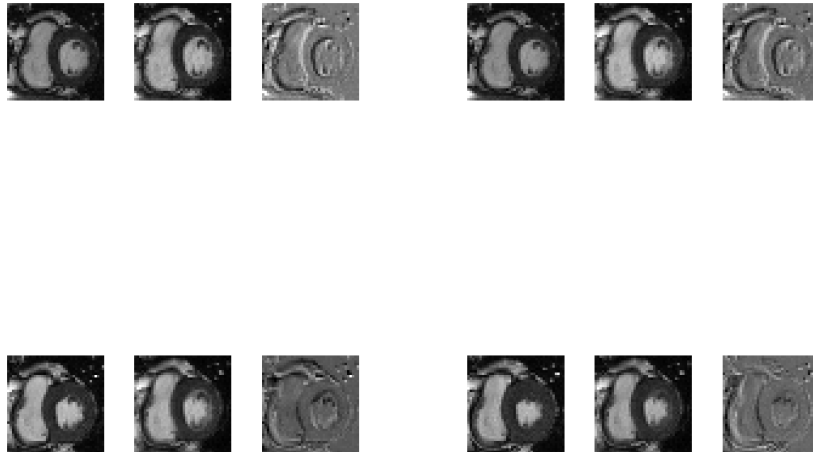


FIGURE 3.5 – Images simulées, images acquises et différence entre les images IRM acquises et les images simulées pour 4 temps intermédiaires du cycle équi-répartis

3.3.3 Reconstruction de l'anatomie du cœur

Le but de cette section est de reconstruire l'anatomie du cœur en utilisant la méthode numérique à partir d'images de coupe 2D à un temps fixé. Nous commençons tout d'abord par des exemples simples qui illustrent l'utilisation du transport optimal pour interpoler entre deux images.



FIGURE 3.6 – Une gaussienne ρ_0 à gauche, une gaussienne ρ_1 à droite

Exemple1 : Le premier exemple considéré est celui de deux gaussiennes ρ_0 et ρ_1 . Le domaine spatial est discrétisé sur une grille avec $n = 20$, la discrétisation temporelle a été fixée à $p = 60$ et les paramètres $\gamma = \alpha = 1$ et $\rho_{min} = .05$ pour ρ_0 et ρ_1 . L'image transportée obtenue est présentée dans la figure 3.7 après 2000 itérations de

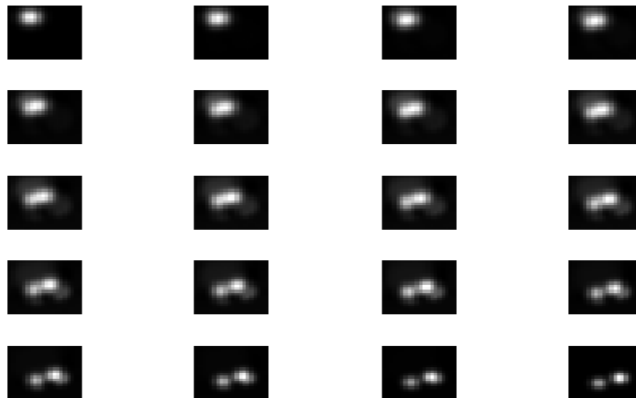


FIGURE 3.7 – Images intermédiaires

l'algorithme (3.17).

La figure 3.8 représente la courbe de convergence de la fonctionnelle J à minimiser en fonction des itérations.

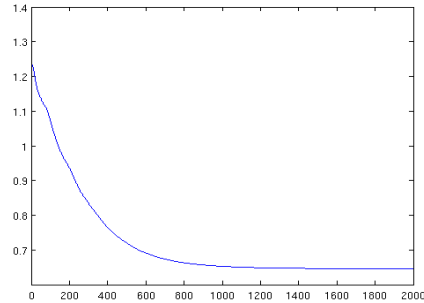


FIGURE 3.8 – La fonctionnelle J

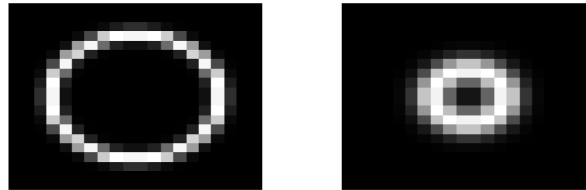


FIGURE 3.9 – Images de départ et finale

Exemple2 : Dans cet exemple les images considérées sont deux anneaux centrés de tailles différentes tel que ρ_0 représente l'anneau de grande taille et ρ_1 représente le petit anneau. Le domaine spatial est discrétisé sur une grille avec $n = 40$ et la discrétisation temporelle a été fixée à $p = 60$ et les paramètres $\gamma = \alpha = 1$ et $\rho_{min} = .09$ pour ρ_0 et ρ_1 . La figure 3.10 représente les images intermédiaires obtenues lorsqu'on transporte ρ_0 vers ρ_1 après 2000 itérations.

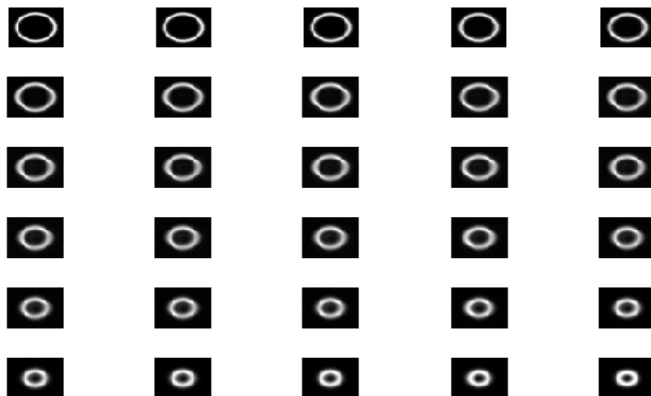


FIGURE 3.10 – Images intermédiaires

La figure 3.11 représente la fonctionnelle J . Les oscillations présentes dans la figure proviennent de l'approximation du calcul de l'opérateur $Prox_{\gamma J}$, $\rho_{j,k}$ pouvant être proche de zéro.

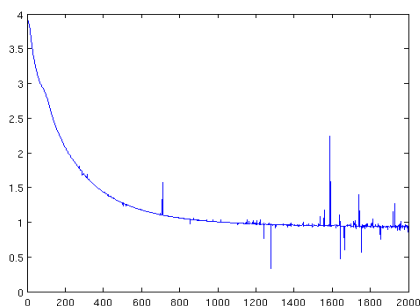


FIGURE 3.11 – La fonctionnelle J

Exemple 3 : Considérent maintenant l'exemple des densités irrégulières pour $n = 60$, $p = 100$ et les paramètres $\gamma = .025$, $\alpha = 1.98$ et $\rho_{min} = .05$ pour ρ_0 et ρ_1 .



FIGURE 3.12 – L'étoile ρ_0 à gauche, La boule ρ_1 à droite

La figure 3.13 représente les images intermédiaires obtenues après 100 itérations et la figure 3.14 représente la fonctionnelle J .

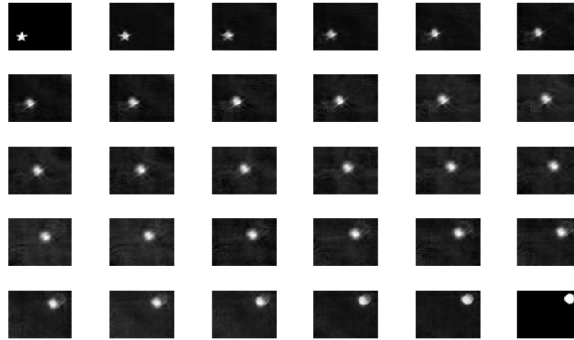


FIGURE 3.13 – Images intermédiaires

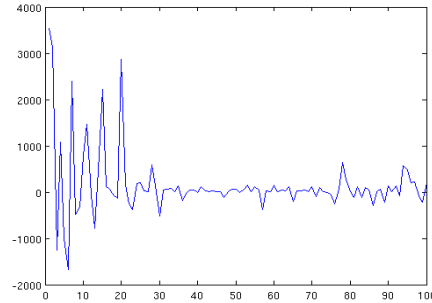


FIGURE 3.14 – La fonctionnelle J décroît de $3.54e^3$ à 1.001

Reconstruction anatomique Dans cette partie nous prenons deux images de deux coupes orthogonales au grand axe du cœur à des altitudes décroissantes pour un temps arbitrairement fixé, fin de la diastole (Figure 3.15) et fin de systole (Figure 3.19) et nous cherchons à trouver les images intermédiaires entre les deux coupes afin de reconstruire l'anatomie du cœur. Pour un traitement d'image satisfaisant et pour retrouver les structures d'intérêts parmi toutes les autres, on utilise un masque de la structure recherchée.

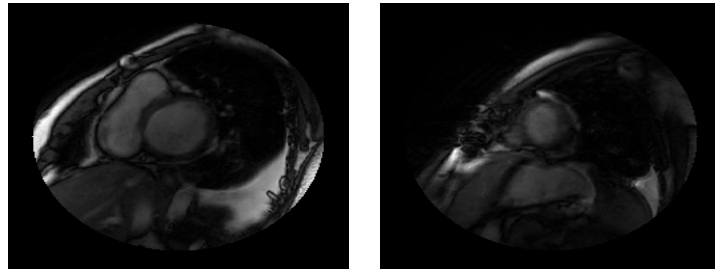


FIGURE 3.15 – Image pour la première coupe. Image pour la dernière coupe



FIGURE 3.16 – Image avec masque pour la première coupe à gauche. Image avec masque pour la dernière coupe à droite

Le premier exemple que l'on considère est celui de deux coupes d'images cardiaques à des altitudes décroissantes en fin de la diastole. La figure 3.17 représente les images obtenues après 2000 itérations. Le domaine spatial est discrétisé sur une

CHAPITRE 3. UTILISATION DU TRANSPORT OPTIMAL POUR LE SUIVI DYNAMIQUE D'IMAGES OU LA RECONSTRUCTION ANATOMIQUE

grille avec $n = 40$, la discrétisation temporelle a été fixé à $p = 100$ et les paramètres $\gamma = \alpha = 1$, et $\rho_{min} = .05$ pour ρ_0 et ρ_1 .



FIGURE 3.17 – Images intermédiaires

La fonctionnelle J pour cet exemple est présentée dans la figure 3.18.

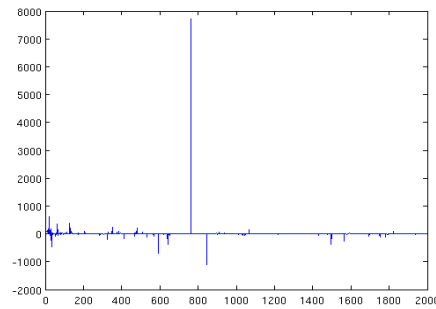


FIGURE 3.18 – La fonctionnelle J décroît de 117.22 à 0.73

La fonctionnelle J présente des valeurs aberrantes dû au maillage grossier, ce qui fait apparaitre des valeurs négatives de ρ et par suite on ne voit pas bien la décroissance de la fonctionnelle.

La figure 3.19 représente le comportement de J en éliminant ces valeurs et en prenant que les 100 premières itérations.

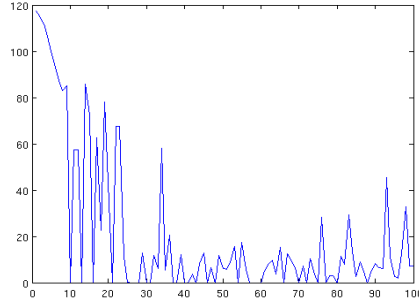


FIGURE 3.19 – Fonctionnelle J décroît de 117.22 à 3.10

Le deuxième exemple que l'on considère est celui de deux coupes d'images cardiaques à des altitudes décroissantes en fin de la systole.

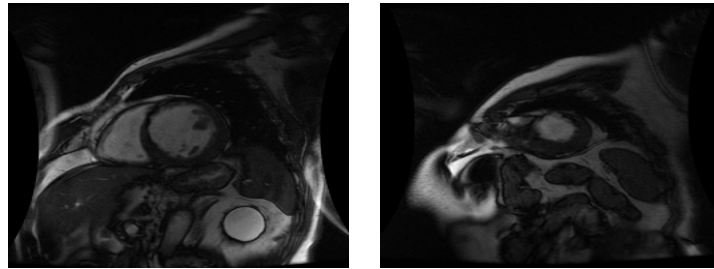


FIGURE 3.20 – Image pour la première coupe à gauche. Image pour la dernière coupe à droite



FIGURE 3.21 – Image avec masque pour la première coupe à gauche. Image avec masque pour la dernière coupe à droite

La figure 3.22 représente les images intermédiaires obtenues après 2000 itérations de l'algorithme (3.17). Le domaine spatial est discrétisé sur une grille avec $n = 40$ et la discrétisation temporelle a été fixée à $p = 100$ et les paramètres $\gamma = \alpha = 1$ et $\rho_{min} = .09$ pour ρ_0 et ρ_1 .



FIGURE 3.22 – Images intermédiaires

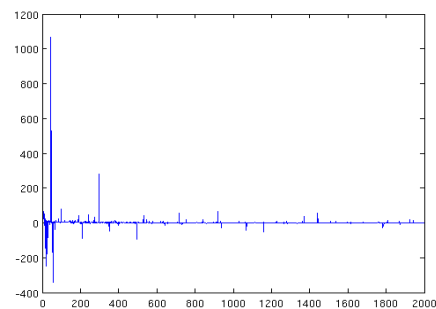


FIGURE 3.23 – La fonctionnelle J décroît de 73.088 à 0.32

Comme précédemment en éliminant les valeurs aberrantes on obtient la fonctionnelle J représentée dans la figure 3.24 pour les 100 premières itérations.

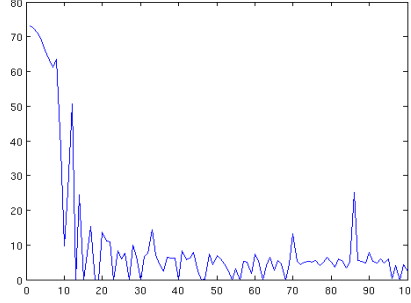


FIGURE 3.24 – La fonctionnelle J pour 100 points décroît de 73.088 à 3.76

3.3.4 Interpolation en temps

Par les exemples précédents nous concluons que le transport optimal permet d'interpoler entre deux images initiale et finale données, mais dans certain cas l'interpolation en temps entre deux images défini par $\rho_t(x, t) = (1 - t)\rho_0(x) + t\rho_1(x)$ peut être aussi une solution du problème de transport optimal. Numériquement, nous constatons que le résultat de l'algorithme (3.17) est proche d'une interpolation temporelle lorsque la valeur initiale de la densité ρ est prise très petite ou très grande ou lorsque les images (ρ_0 et ρ_1) ont des valeurs très proches. Essayons de justifier cela par l'analyse suivante :

Relevons les conditions limites par translation, on note $w_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (1 - t)\rho_0 + t\rho_1 \end{pmatrix}$,
par suite

$$\begin{cases} \widetilde{\text{div}}(w - w_t) &= \rho_0 - \rho_1, \text{ dans } Q \\ (w|\tilde{n}) &= 0 \text{ sur } \partial Q \\ \rho(0, \cdot) - \rho_t(0, \cdot) &= 0 \text{ dans } \Omega \\ \rho(1, \cdot) - \rho_t(1, \cdot) &= 0 \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

alors,

$$\begin{cases} \widetilde{\text{div}}(\tilde{w}) &= \rho_0 - \rho_1 \text{ dans } Q \\ (\tilde{w}|\tilde{n}) &= 0 \text{ sur } \partial Q \end{cases}$$

avec $\tilde{w} = w - w_t$.

Intéressons nous à l'étape $Prox_{\lambda G}$, nous devons minimiser le problème sous contrainte :

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} \|\tilde{w} - w_0\|^2 \\ \widetilde{\text{div}}(\tilde{w}) &= \rho_0 - \rho_1 \text{ dans } Q \\ (\tilde{w}|\tilde{n}) &= 0 \text{ sur } \partial Q \end{cases}$$

Par une méthode de multiplicateur de Lagrange, on calcule

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} \|\tilde{w} - w_0\|^2 + \lambda(\widetilde{\text{div}}(\tilde{w}) - (\rho_0 - \rho_1)) \\ \widetilde{\text{div}}(\tilde{w}) &= \rho_0 - \rho_1 \\ (\tilde{w}|\tilde{n}) &= 0 \end{cases}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} \tilde{w} - w_0 + \tilde{\nabla}\lambda &= 0 \text{ dans } Q \\ \widetilde{\text{div}}(\tilde{w}) &= \rho_0 - \rho_1 \text{ dans } Q \\ (\tilde{w}|\tilde{n}) &= 0 \text{ sur } \partial Q \end{cases} \\
 & \quad \Longleftrightarrow \\
 & \begin{cases} \widetilde{\text{div}}(\tilde{w}) - \widetilde{\text{div}}(w_0) + \tilde{\Delta}\lambda &= 0 \text{ dans } Q \\ \widetilde{\text{div}}(\tilde{w}) &= \rho_0 - \rho_1 \text{ dans } Q \end{cases} \\
 & \quad \Longleftrightarrow \\
 & \begin{cases} \tilde{\Delta}\lambda &= \widetilde{\text{div}}(w_0) - \rho_0 + \rho_1 \\ \partial_n \lambda &= (w_0|\tilde{n}) \end{cases}
 \end{aligned}$$

si $\rho_1 - \rho_0 \ll 1$, alors

$$\tilde{\Delta}\lambda - \widetilde{\text{div}}(w_0) = 0 \Rightarrow \tilde{\nabla}\lambda = w_0$$

Ainsi,

$$\tilde{w} - w_0 + \tilde{\nabla}\lambda = 0 \Rightarrow \tilde{w} = 0 \Rightarrow w = w_t = (1 - t)\rho_0 - \rho_1$$

où \tilde{n} est la normale extérieure de ∂Q , $\tilde{\nabla}$ est le gradient espace-temps et $\tilde{\Delta}$ est le laplacien espace-temps.

Ce qui justifie le fait que la solution de l'algorithme (3.17) reste proche de l'interpolation en temps.

Dans la figure 3.25 un résultat est présenté après 2000 itérations dans le cas de l'interpolation entre deux images cardiaques avec masque qui ont des valeurs proches.

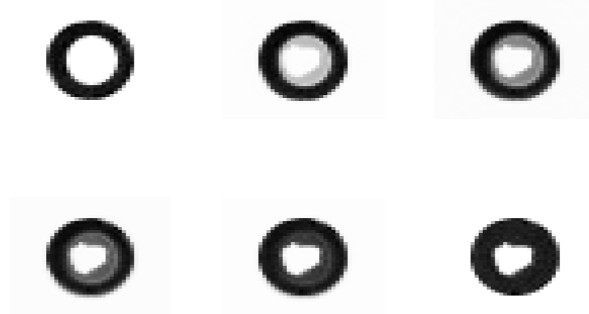


FIGURE 3.25 – Images initiale et finale et quatre images intermédiaires

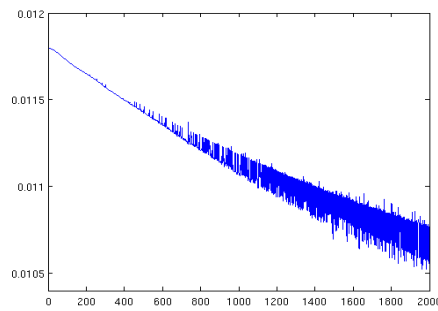


FIGURE 3.26 – La fonctionnelle J

Remarquons que lorsque γ est choisi grand et α petit on peut trouver une solution proche de l'interpolation en temps. Remarquons que pour $\alpha \ll 1$ on reste proche du point d'initialisation de (3.17). Nous considérons ici l'exemple de l'interpolation de l'étoile vers la boule où on prend $\gamma = 1$ et $\alpha = 1$, alors dans ce cas on reste proche de l'interpolation en temps pour 500 itérations (voir Figure 3.27) contrairement avec ce qu'on avait trouvé précédemment avec $\gamma = 0.025$ et $\alpha = 1.98$ (Figure 3.13).

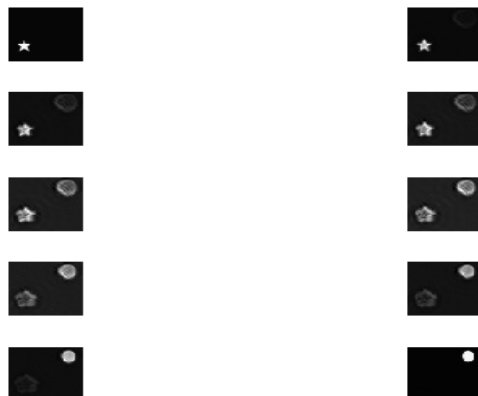


FIGURE 3.27 – Images intermédiaires équi-réparties en temps, la première et la dernière sont données.

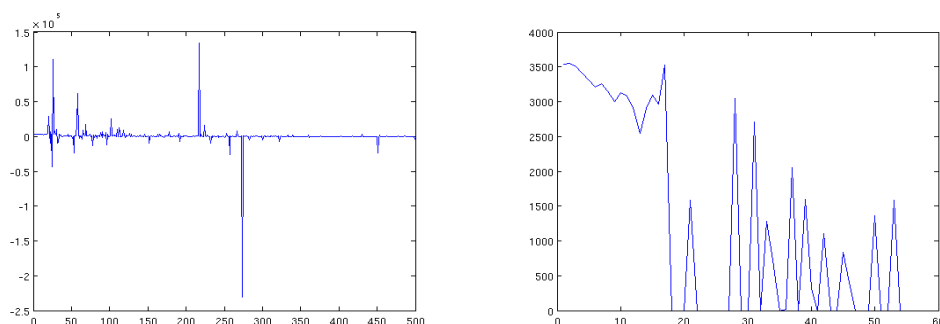


FIGURE 3.28 – La fonctionnelle J et un zoom sur les 60 premières itérations

3.3.5 Analyse des performances de l'algorithme

Dans la section précédente nous avons vu que le choix des paramètres γ et α agit sur la solution obtenue à savoir l'interpolation temporelle ou pas, et cela lorsqu'ils sont pris trop grands ou trop petits. L'opérateur proximal $Prox_{\gamma}J$, est défini par :

$$\arg \min \frac{1}{2} \|w - w_0\|^2 + \gamma J(w)$$

où les conditions d'optimalité sont données par :

$$\begin{cases} w_i - w_{0_i} + 2\gamma \frac{w_i}{\rho} = 0 \\ \rho - \rho_0 - \gamma \frac{\|w_i\|^2}{\rho^2} = 0 \end{cases}$$

pour $i = 1, 2$.

Remarquons que cela est équivalent à résoudre sur un pas de longueur γ avec un schéma

d'Euler implicite une approximation de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{w} = -\gamma DJ(w)^t \\ w(0) = w_0 \end{cases}$$

c'est à dire

$$\frac{w^1 - w^0}{\gamma} = -DJ(w^1)^t$$

Remarquons que

$$\frac{d}{dt}J(w(t)) = DJ(w(t)) \frac{d}{dt}w(t) = -\gamma \|DJ\|^2$$

Ainsi, au cours du temps J est non croissante. Comme cela est fait pour les équations différentielles ordinaires, nous proposons d'adapter le pas γ de la manière suivante : on se donne une tolérance Tol , on évalue DJ à l'itération précédente, si $\gamma^2 * \max DJ \geq Tol$ on divise γ par deux et on calcule l'opérateur proximal de J avec le nouveau γ . On impose un minorant positif à γ . Cette technique consiste à demander à ce que l'erreur locale de consistance soit suffisamment petite. Remarquons que dans la démonstration de la convergence de l'algorithme donné par Combettes [28], les paramètres γ et α sont choisis dans des intervalles vérifiant : $0 < \gamma$; $\alpha \in (0, 2)$ et peuvent varier.

Pour tester notre algorithme nous prenons les mêmes exemples que précédemment d'une coupe IRM 2D à des altitudes décroissantes en fin de la diastole et en fin de la systole. A la figure 3.29 nous présentons les images interpolées après 300 itérations. La première et la dernière sont fixées, les autres sont équi-réparties en temps.

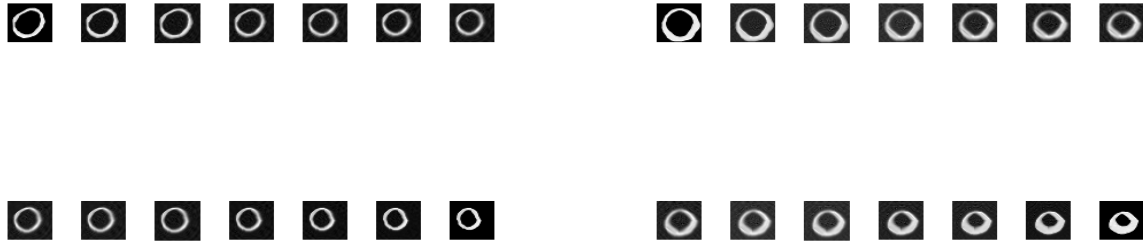


FIGURE 3.29 – Images intermédiaires avec l'algorithme adaptatif pour les deux exemples avec 300 itérations, à gauche pour les coupes en fin de diastole, à droite pour les coupes en fin de systole

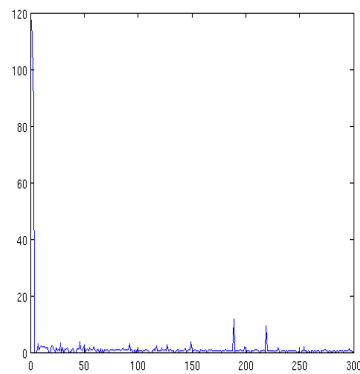


FIGURE 3.30 – La fonctionnelle J décroît de 117,22 à 0.48

Nous remarquons qu'avec l'étape adaptative on accélère la convergence c'est à dire après 300 itérations on a un résultat raisonnable par contre pour le cas sans algorithme adaptatif et avec les paramètres $\gamma = \alpha = 1$ après 500 itérations on est encore loin de la solution attendue, il faut donc 2000 itérations pour avoir les images recherchées comme le montre la figure 3.31.

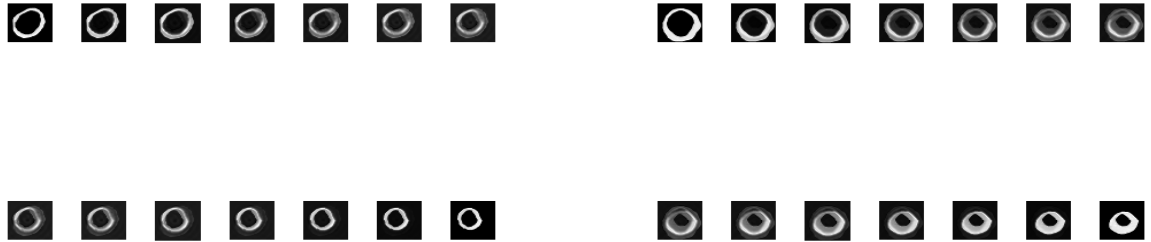


FIGURE 3.31 – Images intermédiaires sans algorithme adaptatif pour les deux exemples avec 500 itérations, à gauche pour les coupes en fin de diastole, à droite pour les coupes en fin de systole

Reconstruction 3D Dans la figure 3.32 une représentation 3D du cœur est représentée en utilisant les deux coupes 2D à deux altitudes différentes de la figure 3.16. L'interpolation par transport optimal permet la reconstruction 3D.

3.4 Conclusion

L'utilisation de méthode numérique de transport optimal pour reconstruire l'anatomie d'un objet comme le cœur, par exemple, à partir d'images de coupes 2D de celui-ci à un temps fixé est peu développée et semble raisonnable mais l'obtention d'un résultat numérique adapté dépend de nombre d'itérations dans l'algorithme (3.17) et du choix des paramètres ainsi que du type des images utilisées.

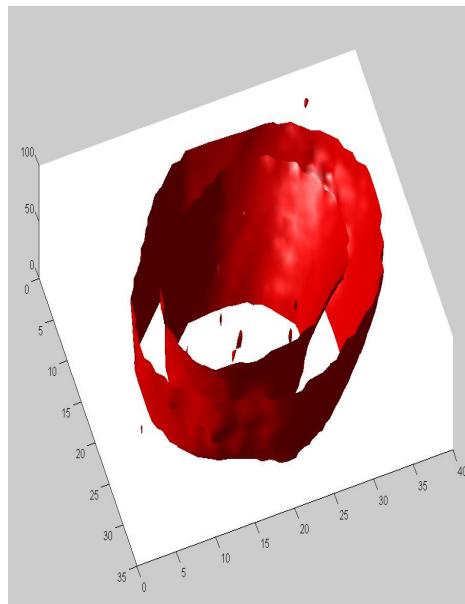


FIGURE 3.32 – Reconstruction 3D par transport optimal

Annexe : Existence et unicité de la solution sur les variétés et pour un problème général

Nous donnons ici le théorème d'existence et d'unicité de la solution d'un problème dégénéré sur les variétés et pour un problème général.
Nous considérons le problème suivant, trouver u solution de :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(J\nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega; \\ u = f & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.18)$$

avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine compact avec frontière régulière $\partial\Omega$, $f = f(x_1, \dots, x_n)$ une fonction définie sur $\partial\Omega$ et J un tenseur symétrique donné par :

$$J = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\xi_1 \quad \xi_2 \quad \dots \quad \xi_k)$$

avec ξ_1, \dots, ξ_k les vecteurs propres de normes positives.

Avant de montrer l'existence et l'unicité de la solution de (3.18) sur la variété intégrale M dont TM est généré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres strictement positives, nous allons d'abord calculer son expression en coordonnées locales, et ensuite construire la solution.

Nous commençons par une brève introduction des notations et définitions.

Pour une variété Riemannienne donnée M , on note par $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ son produit scalaire, $\operatorname{div}_M(\cdot)$ la divergence d'un champ de vecteur, la dérivée de Lie est notée par L et le crochet de Lie par $[\cdot, \cdot]$. Rappelons que si (x_1, \dots, x_k) sont les coordonnées locales, alors les dérivées partielles ∂x_i sont une base de l'espace tangent $T_m M$ et dx_i une base de l'espace cotangent $T_m^* M$.

Par suite, en coordonnées locales un champ de vecteur ξ est égal à $\sum \xi^k \partial x_k$, pour toute fonction régulière $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sa dérivée est donnée par :

$$\xi(f) = \sum \xi^k \partial x_k f$$

La forme volume est égale à

$$\omega = g^{\frac{1}{2}} dx_1 \dots dx_n$$

avec $\det g$ désigne le déterminant de g exprimée sous forme d'une matrice symétrique définie positive dans la carte locale.

La divergence d'un champ de vecteur ξ peut être définie comme la dérivée de Lie de ω selon ξ

$$L_\xi \omega = \text{div}_M(\xi) \omega$$

Cette définition s'étend aux champs de vecteurs sur \mathbb{R}^n . La quantité mesure la variation d'une unité de volume le long des courbes intégrales de ξ .

Le fait que,

$$\xi(\omega(\partial x_1, \dots, \partial x_k)) = L_\xi \omega(\partial x_1, \dots, \partial x_k) - \sum_i \omega(\partial x_1, \dots, [\xi, \partial x_i], \dots, \partial x_k)$$

donne l'expression de $\text{div}_M(\xi)$ en coordonnées locales :

$$\text{div}_M(\xi) = g^{-\frac{1}{2}} \xi(g^{\frac{1}{2}}) + \sum_i \partial x_i(\xi^i) \quad (3.19)$$

Etant donnée une fonction régulière f , elle a une forme associée, df , défini comme suit

$$df(\xi) = \xi(f) = \sum \xi^k \partial x_k(f)$$

Le gradient, ∇f , pour toute fonction est défini comme suit : $j^{-1}(df)$, pour $j : T_m M \rightarrow T_m^* M$ l'isomorphisme donné par $j(\xi)(\eta) := \langle \xi, \eta \rangle_M$. Donc

$$\langle \nabla f, \xi \rangle_M = j(j^{-1}(df))(\xi) = \xi(f) \quad (3.20)$$

Les formules ci-dessus (3.19) et (3.20) sont les seules dont nous aurons besoin pour calculer (3.18) dans les coordonnées locales de M .

Munis des outils et notations ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned} \text{div}_{\mathbb{R}^n}(J\nabla u) &= \text{div}_{\mathbb{R}^n}(\sum \xi_i \xi_j \frac{\partial u}{\partial x_j}) \\ &= g^{-1/2}(\sum \xi_i \xi_j \frac{\partial u}{\partial x_j}) g^{1/2} + \sum \frac{\partial}{\partial x_k}(\sum \xi_i \xi_j \frac{\partial u}{\partial x_j}) \\ &= g^{-1/2} \sum \xi_i g^{1/2} \xi_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}(\xi_j \frac{\partial u}{\partial x_j}) + \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial x_k}(\xi_j \frac{\partial u}{\partial x_j}) \\ &= (g^{-1/2} \sum \xi_i g^{1/2} + \sum \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i})(\xi_j \frac{\partial u}{\partial x_j}) + \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial x_k}(\xi_j \frac{\partial u}{\partial x_j}) \quad l \\ &= \sum \text{div}_{\mathbb{R}^n} \xi_j \cdot \langle \nabla u, \xi_j \rangle_{\mathbb{R}^n} + \sum \xi_j (\langle \nabla u, \xi_j \rangle_{\mathbb{R}^n}) \\ &= \text{div}_{\mathbb{R}^n}(\langle \nabla u, \xi_m \rangle_{\mathbb{R}^n} \cdot \xi_m) \\ &= \sum_m \langle \nabla u, \xi_m \rangle_{\mathbb{R}^n} \cdot \text{div}_{\mathbb{R}^n} \xi_m + \sum \xi_m (\langle \nabla u, \xi_m \rangle_{\mathbb{R}^n}) \\ &= \sum_m \langle \nabla u, \xi_m \rangle_M \cdot \text{div}_M \xi_m + \sum \xi_m (\langle \nabla u, \xi_m \rangle_M) \end{aligned} \quad (3.21)$$

La dernière équation est obtenue dans le cas où $\text{div}_{\mathbb{R}^n}(J\nabla u)$ est restreinte à M .

En outre,

$$\text{div}_M(J\nabla u) = \sum_m \langle \nabla u, \xi_m \rangle_M \cdot \text{div}_M(\xi_m) + \sum_m \xi_m (\langle \nabla u, \xi_m \rangle_M) \quad (3.22)$$

Si le champ de vecteur a une divergence nulle dans \mathbb{R}^n , alors les deux expressions (3.21) et (3.22) sont égales à :

$$\sum_m \xi_m (\langle \nabla u, \xi_m \rangle_M) = \sum_m \xi_m (\langle \nabla u, \xi_m \rangle_{\mathbb{R}^n}) = \sum_m \xi_m (u_{\xi_m})$$

où u_{ξ_m} est la dérivée partielle (dans \mathbb{R}^n) dans la direction $\xi_m(x_1, \dots, x_n)$. Cette coïncidence de formulations conduit à :

Proposition 3.1 Si $\text{div}_{\mathbb{R}^n}(\xi_i) = 0$, pour tout i , alors il existe une unique solution du problème (3.18) sur toutes variétés intégrales.

Existence et unicité de la solution du problème sur les variétés :

Theorème 3.1 Soit M une variété Riemannienne compacte intégrée dans \mathbb{R}^n . Si ξ_m sont les champs de vecteurs orthonormales (les vecteurs propres associés aux valeurs propres strictement positives) et f une fonction régulière, alors les problèmes suivants ont une solution unique régulière :

1. $\operatorname{div}_{\mathbb{R}^n}(J\nabla u)|_M = f$, avec $u|_{\partial M} = 0$
2. $\operatorname{div}_{\mathbb{R}^n}(J\nabla u)|_M = 0$, avec $u|_{\partial M} = f$
3. $u_t = \operatorname{div}_{\mathbb{R}^n}(J\nabla u)|_M$, avec $u|_{\partial M} = f$ et une condition initial u_0

Proposition 3.2 La solution des problèmes 2 et 3 du théorème (3.1) est infiniment régulière et vérifie le principe du Maximum :

$$\max_M u = \max_{\partial M} u = \max_{\partial M} f, \text{ pour le cas 2}$$

$$\max_t u(t) = \max(u_0, f), \text{ pour le cas 3}$$

Pour les preuves du théorème (3.1) et la proposition (3.2) voir [30].

Existence et unicité de la solution du problème général

Le but de cette section est de prouver que (3.18) admet une solution unique.

Theorème 3.2 Soit Ω un domaine compact de \mathbb{R}^n avec une frontière régulière $\partial\Omega$, si f est une fonction définie sur $\partial\Omega$ telle que la restriction aux variétés intégrales est régulière, alors il existe une unique solution du problème donné par :

$$\operatorname{div}(J\nabla u) = 0$$

avec

$$u|_M = f$$

Preuve. L'opérateur différentiel elliptique se restreint à une E.D.P sur chacune des variétés intégrales M , qui par le théorème 3.1 admet une unique solution régulière u_M , qui prolonge $f|_{\partial\Omega \cap M}$ à tout ensemble. Maintenant, par le théorème de Frobenius, ces variétés recouvrent tout l'espace, de sorte que $\forall m \in \mathbb{R}$, il existe une unique partie M_m passant par le point. La fonction dans \mathbb{R}^n est définie comme suit : $u_m = u_{M_m}$ solution du problème général. \square

Calcul de la solution pour un exemple simple

Dans cette section nous donnons quelques étapes pour le calcul de la solution du problème, dans le cas d'un seul vecteur propre non nul ξ et $n = 3$ et $Q \subset \mathbb{R}^3$ un domaine borné. Le problème consiste à résoudre

$$\operatorname{div}(J\nabla u) = f, \text{ dans } \mathbb{R}^3$$

Lorsque $\text{div}(\xi) = 0$, alors le problème se restreint à résoudre :

$$\text{div}(J\nabla u)_M = f \quad (3.23)$$

avec M la variété de \mathbb{R}^3 dont le vecteur tangent est ξ qui est le vecteur propre associé à la valeur propre non nulle.

Résoudre le problème (3.23) est équivalent à résoudre :

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}(\frac{d}{d\tau}\varphi) = g(\tau) = f(X(\tau, \tilde{x})); \\ \varphi(0), \varphi(\tau_s) \text{ donnees} \end{cases} \quad (3.24)$$

En posant $\varphi(\tau) = u(X(\tau, \tilde{x}))$. X est le flot associé à ξ solution de :

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}X(\tau, \tilde{x}) = \xi(X(\tau, \tilde{x})); \\ X(0, \tilde{x}) = \tilde{x} \in \partial Q \end{cases} \quad (3.25)$$

Soit $G(s, t)$ la fonction de Green de

$$\frac{-d^2}{d\tau} = \delta_\tau$$

Alors

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t_s} G(s, t) f(X(s, \tilde{x})) ds;$$

Donc pour connaître $u(t, \tilde{x})$ on doit calculer le flot X et puis trouver la courbe intégrale passant par (t, \tilde{x}) , ensuite poser :

$$u(t, \tilde{x}) = \int_{t_0}^{t_s} G(s, t) f(X(s, \tilde{x})) ds;$$

Calcul du flot X : Prenons $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ x \end{pmatrix}$ qui correspond à $J = \begin{pmatrix} 1 & -y & x \\ -y & y^2 & -yx \\ x & -yx & x^2 \end{pmatrix}$.

Sous forme matricielle le problème (3.25) s'écrit :

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

Soient

$$\dot{Y} = \begin{pmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

et les valeurs propres $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, les vecteurs propres associés respectivement sont $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Donc

$$Y(t) = \alpha e^{it} v_1 + \beta e^{-it} v_2 \quad (3.26)$$

et

$$Y(0) = \alpha v_1 + \beta v_2$$

$$Y(0) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ix-y}{2i} \\ \frac{ix+y}{2i} \end{pmatrix}$$

On remplace les valeurs de α et β dans (3.26), alors

$$\begin{cases} Y_1(t) = x\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right) - y\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right) \\ Y_2(t) = x\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right) + y\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right) \end{cases}$$

Par suite, le flot X est donné par :

$$\begin{cases} X_1(t) = t \\ X_2(t) = x \cos t - y \sin t \\ X_3(t) = x \sin t + y \cos t \end{cases}$$

Il est difficile de calculer analytiquement la solution, on a donc recours à une méthode d'approximation qui est la méthode des éléments finis. Un cas simple est présenté dans la dernière partie du chapitre 2, celui de la formulation au sens des moindres carrés de l'équation de transport.

Bibliographie

- [1] ADAMS. R.A : Sobolev Spaces. Academic Press, New York, (1975).
- [2] AMBROSIO. L, FUSCO. N, PALLARA. D : Functions of bounded variation and free discontinuity problems. Oxford mathematical monographs, Oxford University Press, (2000).
- [3] ATTOUCH. H, BUTTAZZO. G, MICHAILLE. G : Variational analysis in Sobolev and BV spaces : applications to PDEs and optimization. MPS-SIAM series on optimization, (2006).
- [4] AUBERT. G, DERICHE. R, KORNPORST. P : Computing optical flow problem via variational techniques. SIAM J. Appl. Math., 80, 156–182, (1999).
- [5] AUBERT. G, KORNPORST. P : Mathematical problems in image processing, partial differential equations and the calculus of variations. Applied Mathematical Sciences 147, Springer Verlag, (2006).
- [6] AZÉRAD. P : Analyse des équations de Navier-Stokes en bassin peu profond et de l'équation de transport. Thèse de doctorat, Université de Neuchâtel, (1996).
- [7] AZÉRAD. P, POUSIN. J : Inégalité de Poincaré courbe pour le traitement variationnel de l'équation de transport. C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I 322, 721-727, (1996).
- [8] AZÉRAD. P, PERROCHET. P, POUSIN. J : Space-time integrated least-squares : A simple, stable and precise finite element scheme to solve advection equations as if they were *elliptic*. Chipot, M. (ed.) et al., Progress in partial differential equations : the Metz surveys 4. Proceedings of the conference given at the University of Metz, France during the 1994-95 'Metz Days'. Harlow : Longman. Pitman Res. Notes Math. Ser. 345, 161-174, (1996).
- [9] BARDOS. C : Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels ; théorèmes d'approximation ; applications à l'équation de transport, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., **3**, 185-233, (1970).
- [10] BARTELS. S : Total variation minimization with Finite Elements : Convergence and Iterative Solution, SIAM J. Numerical Analysis, 3, 1162-1180, (2012).
- [11] BECK. A, TEBoulLE. M : Space-time integrated least squares : a time marching approach. SIAM J. Img. Sci., 1, 183–202, (2009).
- [12] BESSON. O, DE MONTMOLLIN. G : Space-time integrated least squares : a time marching approach. Int. J. Meth. Fluids, **44**, 525-543, (2004).
- [13] BESSON. O, POUSIN. J : Solutions for linear conservation laws with velocity fields in L^∞ . Archive for rational mechanics and analysis, **186**, 159-175, (2007).
- [14] BOCHEV. P.B, GUNZBURGER. M.D : Least-Squares Finite Element Methods, Applied Mathematical Sciences, volume 166, Springer, (2009).

BIBLIOGRAPHIE

- [15] BOUCHUT. F : Renormalized solutions to the vlasov equation with coefficients of bounded variation. Arch. Rational Mech. Anal. **157**, 75-90, (2001).
- [16] BRENIER. Y, BENAMOU. J. : A computational fluid mechanics solution to the monge-kantorovich mass transfer problem. Numerische Mathematik, 84 :375–393, (2000).
- [17] BRÉZIS. H : Analyse fonctionnelle. Masson, Paris, (1985).
- [18] BREZZI. F, FORTIN. M : Mixed and hybrid finite element methods. Springer-Verlag, (1991).
- [19] CHAMBOLLE. A, POCK. T : A first-Order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging, Journal of Mathematical Imaging and Vision, 1, 120-145, (2011).
- [20] CHATTOT. J.J, GUIU-ROUX. J, LAMINE. J : Numerical solution of first-order conservation equation by a least squares method. Int. J. Numer. Methods Fluid, **2**, 209-219, (1982).
- [21] CHEN. G.Q, FRID. H : Divergence-Measure fields and hyperbolic conservation laws. Arch. Rational Mech. Anal. **147**, 89-118, (1999).
- [22] CHENYANG. Xu, JERRY L. PRINCE : Snakes, shapes, and gradient vector flow. IEEE Transactions on Image Processing, 359-369, (1998).
- [23] CHRISTOPHER. C : Estimation 3D conjointe forme/structure/mouvement dans des séquences dynamique d'images. Application à l'obtention de modèles cardiaques patients spécifiques anatomiques et fonctionnels, (2012).
- [24] CIARLET. P. G : Mathematical elasticity. North-Holland, (1993).
- [25] COHEN. L. D, COHEN. I : Finite-elements methods for active contour models and balloons for 2D and 3D images. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. **15**, 11, 1131-1147, (1993).
- [26] COLOMBINI. F, LERNER. N : Uniqueness of continuous solutions for BV vector fields. Duke Math. J. **111**, 357-384, (2002).
- [27] COLOMBINI. F, LUO. T, RAUCH. J : Uniqueness and nonuniqueness for nonsmooth divergence free transport. Séminaire : Equations aux Dérivées Partielles, 2002–2003. Ecole Polytech., Palaiseau, (2003).
- [28] COMBETTES. P.L, PESQUET. J.C : Proximal Splitting Methods in Signal Processing, (2010).
- [29] COUSTY. J, NAJMAN. L, COUPRIE. M, CLÉMENT-GUINAUDEAU. S, GOISSEN. T, GAROT. J : Automated, accurate and fast segmentation of 4D Cardiac MR Images. Functional imaging and modeling of the Heart (FIMH), LNCS, Springer, No.4466, 474-483, (2007).
- [30] DEBORA GIL RESINA : Geometric differential operators for shape modeling. Thèse, Université de Barcelone, (2004).
- [31] DE MONTMOLLIN. G : Méthode STILS pour l'équation de transport : comparaisons et analyses. Etude d'un modèle de fermeture pour la loi de Darcy. Thèse de doctorat, Université de Neuchâtel, (2001).
- [32] DEPAUW. N : Non unicité des solutions bornées pour un champ de vecteurs BV en dehors d'un hyperplan. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **337**, 249-252, (2003).
- [33] DIALLO. O : Modélisation et simulation numérique de résines réactives dans un milieu poreux. PhD dissertation, Université Claude Bernard Lyon 1, (2000).

BIBLIOGRAPHIE

- [34] DIPERNA. R.T, LIONS. P.L : Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces. *Invent. math.* **98**, 511-547, (1989).
- [35] DE STERCK. H, THOMAS. A, MANTEUFFEL. A, MACCORMIK STEPHEN. F, OLSON. L : Least-squares finite element methods and algebraic multigrid solvers for linear hyperbolic PDEs. *SIAM J. Sci Comput.* Vol 26, N 1, pp. 31-54, (2004).
- [36] DOUGLAS. J, RACHFORD. H : On the numerical solution of heat conduction problems in two or three space variables. *Trans. Amer. Math. Soc.* 82,421-439, (1956).
- [37] EVANS. L. C, GARIEPY. R : Measure theory and fine properties of functions. *Studies in Advanced Mathematics.* CRC Press, Boca Raton, FL, (1992).
- [38] FAUGERAS. O, HERMOSILLO. G : Well-posedness of two nonrigid multimodal image registration methods. *SIAM J. APPL. MATH.* Vol. 64, No. 5, pp. 1550-1587, (2004).
- [39] FAUGERAS. B, POUSIN. J : Variational asymptotic derivation of an elastic model arising from the problem of 3D automatic segmentation of cardiac images. *Analysis and Applications*, 2 , No. 4, 1-33, (2004).
- [40] FRANCA. L.P, STENBERG. R : Error analysis of Galerkin least squares methods for the elasticity equations. *SIAM-J.-Numer.-Anal.*, 28 , pp 1680-1697, (1991).
- [41] FRANCHI. B, SERAPIONI. R, SERRA CASSANO. F : Meyer-Serrin type theorems and relaxation of variational integrals depending on vectors fields. *Houston J. Math.* **22**, 859-890, (1996).
- [42] GILBARD. D, TRUNDINGER. N.S : Elliptic partial differential equations of second order. Springer-Verlag, (2006).
- [43] GIRAULT. V, RAVIART. P.A : Finite element methods for the Navier-Stokes equations. Springer-Verlag, (1986).
- [44] GLOWNSKI. R : Numerical methods for nonlinear variational problems. Springer-Verlag, (1984).
- [45] HAKER. S, ZHU. L, YANG. Y, TANNENBAUM. A : An image morphing technique based on optimal mass preserving mapping. *IEEE TRANSACTIONS ON IMAGE PROCESSING*, 16(6) :1481-1495, June 2007.
- [46] HAURAY. M : On two-dimensional Hamiltonian transport equations with L^p_{loc} coefficients. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **20**, 625-644, (2003).
- [47] KESAVAN. S : Topics in functional analysis and applications ; John Wiley & Sons, (1989).
- [48] KORNPORST. P, AUBERT. G, DERICHE. R : Computing optical flow problem via variational techniques. *SIAM J. Appl. Math.*, 80 :156-182, (1999).
- [49] KUZMIN. D : Linearity-preserving flux correction and convergence acceleration for constrained Galerkin schemes. *Journal of Computational and Applied Mathematics* . (236) 2317-2337, (2012).
- [50] LE GUYADER. C, VESE. L : A combined segmentation and registration framework with a nonlinear elasticity smoother. Springer-Verlag, X.-C. Tai et al. (Eds) ; SSVM 2009, LNCS 5567, pp 600-611, (2009).
- [51] LIEUTAUD. J : Approximation d'opérateurs par des méthodes de décompositions. Thèse, Université de Paris, (1969).

BIBLIOGRAPHIE

- [52] LIONS. P.L, MERCIER. B : Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators. SIAM J. Numer. Anal. 16, 964-979, (1979).
- [53] LIONS. P.L : Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1 ; Oxford Science Publication, Calderon Press, (1996).
- [54] MAITRE. E : Level set, transport optimal, applications à l'image. Cours, (2013).
- [55] MONTAGNAT. J, DELLINGETTE. H : 4D deformable models with temporal constraints : application to 4D cardiac image segmentation, Medical Image Analysis, 9(1), 87-100, (2005).
- [56] NASTAR. C, AYACHE. N : Frequency-based nonrigid motion analysis : Application to four dimensional medical images IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol.18, no.11, p.1067-1079, (1996).
- [57] NECAS. J : Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Masson, Paris, (1967).
- [58] NGUYEN. N, REYNEN. J : A space-time least squares finite element scheme for advection- diffusion equations. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., 42, pp. 331–342, (1984).
- [59] OLEINIKI. O.A, SHAMAEV. A.S, YOSIFIAN,. G.A : Mathematical problems in elasticity and homogenization. studies in mathematics and its applications. North-Holland, (1992).
- [60] PEYRE. G : Optimal transport with Benamou-Brenier Algorithm, (2013)
- [61] PHAM. Q.C, VINCENT. F, CLARYSSE. P, CROISILLE. P, MAGNIN. I.E : A FEM-based deformable model for the 3D segmentation and tracking of the heart in cardiac MRI, Proceedings of the 2nd International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis (ISPA 2001), 250-254, (2001).
- [62] PHAM. Q.C : Segmentation et mise en correspondance en imagerie cardiaque multimodale conduites par un modèle anatomique bi-cavités du coeur, (2002).
- [63] PICQ. M, POUSIN. J, ROUCHDY. Y : A linear 3D elastic segmentation model for vector fields. Application to the Heart Segmentation in MRI. Journal of Mathematical Imaging and Vision, vol 27, n 3, p. 241–255, (2007).
- [64] POUSIN. J, PICQ. M, CLARYSSE. P : Optimal extended optical flow and statistical constraint. In J. V. Aguiar, editor, Proceedings of the International Conference on Computational and Mathematical Methods in Sciences and Engineering CMMSE 2009, volume 3, pages 843–854, (2009).
- [65] RECCARDO. F, JANNELLI. A : Second order positive schemes by means of Flux Limiters for the advection equation . International Journal of Applied Mathematics, (2009).
- [66] ROKAFELLAR. R.T, WETS. R : Variational analysis, Springer, (2008).
- [67] ROUCHDY. Y : Segmentation automatique et suivi du mouvement du coeur par modèles déformables élastiques semi-linéaires et non linéaires en imagerie par résonance magnétique. Thèse de Doctorat, Insa de Lyon, (2005).
- [68] SCHAEERER. J, CLARYSSE. P, POUSIN. J : A new perturbation approach for image segmentation tracking. In 5th IEEE International Symposium on Biomedical Imaging : From Nano to Macro, ISBI2008, Paris, (2008).
- [69] SCHAEERER. J, CLARYSSE. P, POUSIN. J : A dynamic elastic model for segmentation and tracking of the heart in mr image sequences. In Medical Image Analysis, 14 :738-749, (2010).

BIBLIOGRAPHIE

- [70] SIMON. J : Compact Sets in the Space $L^P(O, T; B)$ Ann. Mat. Pura Appl. (4) 146, (1987).
- [71] STAMPACCHIA. G : Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. Presses de l'Université de Montréal, (1966).
- [72] TARTAR. L : Topics in nonlinear analysis. Publications mathématiques d'Orsay, (1978).
- [73] VILLANI. C : Topics in optimal transportation, volume 58 of Graduate Studies in Math. Amer Math Soc, Providence, (2003).
- [74] VINCENT. F : Gabarits déformables élastiques pour la segmentation et le suivi de mouvement du cœur en imagerie par résonance magnétique, Thèse de doctorat, (2001).
- [75] WILDERS. P : On the accuracy of least squares finite elements for a first-order conservation equation. Int. J. Numer. Methods Fluid, 8 , pp. 957–964, (1988).
- [76] WOLBERG. G : Recent advances in image morphing. In Int. Conf. Comput. Graph, pages 64–71. IEEE, (1996).
- [77] ZHU. Y, PAPADEMETRIS. X, SINUSAS. A, DUNCAN. J.S : Segmentation of the left ventricle from cardiac mr images using a subject-specific dynamical model, IEEE transaction on medical imaging, (2009).